

# **Diffusionsapproximation von Warteschlangensystemen mit Gruppenbedienung**

D i s s e r t a t i o n  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von  
**Dipl.-Math. Lars Dohse**  
aus Langen

genehmigt von der  
Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau  
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung:  
8. Dezember 2005

Diese Arbeit wurde am Institut für Mathematik  
der Technischen Universität Clausthal angefertigt.

Vorsitzender der Promotionskommission:	Prof. Dr. M. Demuth
Hauptberichterstatte:	Prof. Dr. Th. Hanschke
Berichterstatte:	Prof. Dr. U. Mertins

Diese Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsstipendiums der IBM Deutschland GmbH in der Niederlassung Mainz. Hier wird die Methode der Diffusionsapproximation für die Produktionsplanung verwendet, vor allem, aber nicht nur, in der Halbleiterindustrie. Für diese Chance, die mir natürlich auch weit über mathematische Themen hinaus wertvolle Erfahrungen bot, möchte ich der IBM danken. Genauso meinen Kollegen, die mir den Aufenthalt angenehm und lehrreich machten: Dr. Ingo Meents und Dr. Horst Zisgen, Manfred Haubrich, Olaf Stephan, Willi Wunsch, Frank Marschollek unter vielen anderen. Meinen guten Freundinnen Julia Gutzler und Constanze Lipowsky danke ich nicht nur für das Korrektur lesen. Weiteren Dank schulde ich Prof. Dr. Thomas Hanschke, dem Betreuer dieser Arbeit und Prof. Dr. Ulrich Mertins, der sich bereit erklärt hat, die Zweitkorrektur zu übernehmen.

Letztlich möchte ich meinen Eltern danken, daß Sie mir diesen Bildungsweg ermöglicht und mich immer unterstützt haben.

Lars Dohse  
Mainz, im Oktober 2005



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Diffusionsprozesse</b>	<b>11</b>
2.1	Stochastische Prozesse und der Raum $D$ . . . . .	11
2.2	Markovprozesse . . . . .	13
2.3	Brownsche Bewegung . . . . .	14
2.4	Das Itô-Integral . . . . .	17
2.5	Diffusionsprozesse und stochastische Differentialgleichungen . . . . .	20
2.6	Zählprozesse . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Reflektion</b>	<b>29</b>
3.1	Die Reflektionsabbildung . . . . .	29
3.2	Reflektierte Brownsche Bewegung . . . . .	32
3.3	Integralgleichungen . . . . .	36
3.4	Reflektierte Integralgleichungen . . . . .	41
3.5	Reflektierte stochastische Differentialgleichungen . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Diffusionsapproximation von Warteschlangensystemen</b>	<b>51</b>
4.1	Warteschlangen mit allgemein verteilten Zwischenankunfts- und Bedienzeiten . . . . .	51
4.2	Diffusionsapproximation von G/G/1 mit der Fokker-Planck-Gleichung . .	53
4.2.1	Diskretisierung . . . . .	56
4.2.2	Absorbierende Schranke mit sofortiger Rückkehr . . . . .	56
4.3	Diffusionsapproximation von G/G/1(b,b) mit der Fokker-Planck-Gleichung	57
<b>5</b>	<b>Approximation der G/G/1-Warteschlange</b>	<b>61</b>
5.1	Konstruktion des G/G/1-Warteschlangensystems . . . . .	61
5.2	Analyse der Warteschlange . . . . .	61
5.3	Durch Reflektion von $X$ zu $Q$ . . . . .	63
5.4	Die Diffusionsapproximation . . . . .	63
5.5	Vergleich zur Diffusionsapproximation mit der Fokker-Planck-Gleichung .	64

<b>6</b>	<b>Approximation der G/G/1(b,b)-Warteschlange</b>	<b>65</b>
6.1	Konstruktion des G/G/1(b,b)-Warteschlangensystems . . . . .	65
6.2	Analyse der Warteschlange . . . . .	65
6.3	Konstruktion der Abbildung . . . . .	67
6.4	Die Diffusionsapproximation . . . . .	68
6.5	Die stochastische Differentialgleichung . . . . .	69
6.6	Die Abbildung mit Reflektion . . . . .	70
6.7	Die Diffusionsapproximation mit Reflektion . . . . .	71
6.8	Die reflektierte stochastische Differentialgleichung . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Approximation der G/G/1(1,b)-Warteschlange</b>	<b>75</b>
7.1	Konstruktion des G/G/1(1,b)-Warteschlangensystems . . . . .	75
7.2	Analyse der Warteschlange . . . . .	77
7.3	Die Abbildung von $\mathbf{X}$ auf $\mathbf{Q}$ . . . . .	79
7.4	Die Diffusionsapproximation mit Reflektion . . . . .	80
7.5	Die reflektierte stochastische Differentialgleichung . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Numerische Lösung</b>	<b>83</b>
8.1	Numerische Approximation einer stochastischen Differentialgleichung . . .	83
8.2	Numerik reflektierter stochastischer Differentialgleichungen . . . . .	86
8.3	Evaluation der Ergebnisse . . . . .	86
8.3.1	Konfidenzintervalle . . . . .	87
<b>9</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>93</b>
9.1	Approximation von Warteschlangen . . . . .	93
9.2	Effekte einer geänderten Auslastung . . . . .	96
9.3	Effekte einer Varianzänderung . . . . .	110
9.4	Effekte einer veränderten Bediengröße . . . . .	120
9.5	Approximation ohne Mindestbediengröße . . . . .	129
9.6	Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>141</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>143</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>145</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>147</b>

# 1 Einleitung

Die Warteschlangentheorie ist inzwischen ein unverzichtbares Werkzeug der mathematischen Produktionsplanung. Erst mit ihrer Hilfe konnte der Zusammenhang zwischen Auslastung und Durchlaufzeiten aufgeschlüsselt oder der Einfluß der Variabilität der Bediendauern auf die Warteschlangenlängen herausgefunden werden.

In der Praxis werden Probleme der Produktionsplanung häufig mittels Monte-Carlo-Simulation untersucht. Dieses Vorgehen macht allerdings eine statistische Bewertung der Ergebnisse notwendig. Um eine entsprechende Genauigkeit zu erzielen, ist in der Regel ein hoher Rechenaufwand erforderlich und selbst dann lassen sich die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Parametern nicht explizit aus einer Formel ablesen wie bei einer analytischen Lösung, sondern müssen mit Hilfe zahlreicher Experimente gefunden werden.

Diese Nachteile lassen sich durch Verwendung warteschlangentheoretischer Ergebnisse ausräumen. Allerdings müssen dafür die jeweiligen Fragestellungen nicht nur mathematisch modelliert, sondern auch analytisch gelöst werden, was selbst bei verhältnismäßig einfach zu beschreibenden Systemen überraschend anspruchsvoll sein kann.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der mathematischen Analyse von Warteschlangensystemen mit Gruppenbedienung, wie sie in besonderem Maße in der Halbleiterindustrie vorkommen, wo diese Arbeit entstanden ist. Bei diesen Systemen werden die Kunden bzw. Werkstücke nicht einzeln, sondern gleichzeitig in Losen vom Umfang  $b$  bedient. Stehen weniger als  $b$  Kunden zur Bedienung an, wenn der Bediener frei geworden ist, bedarf es einer Vorschrift, wie die noch vorhandenen Kunden abzufertigen sind. Die Regel  $(a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{N}$  und  $a \leq b$  besagt, jeweils  $b$  Kunden gleichzeitig abzufertigen, sofern mindestens  $b$  Kunden vorhanden sind. Sind weniger als  $a$  Kunden im System vorhanden, wird solange gewartet, bis durch neu eintreffende Kunden wieder  $a$  im System sind und gleichzeitig abgefertigt werden können. Stehen mehr als  $a$  aber weniger als  $b$  Kunden in der Warteschlange, wenn der Bediener frei wird, werden alle Kunden gleichzeitig bedient.

Zur Kennzeichnung von Warteschlangensystemen hat Gnedenko die Notation  $A/B/c$  eingeführt. Hierbei bedeuten  $A$  der Typ der Verteilung der Zwischenankunftszeiten,  $B$  der Typ der Verteilung der Bedienzeiten der aufeinanderfolgenden Kunden und  $c$  die Anzahl der parallelen Bediener.

Als Grundtyp für unsere Untersuchungen betrachten wir das  $G/G/1$ -System, d.h. ein Warteschlangensystem mit einem Bediener und allgemein verteilten Zwischenankunfts-

und Bedienzeiten (wobei “G” für general steht). Der Fokus dieser Arbeit liegt auf G/G/1-Systemen mit Bedienregel (b,b) oder (1,b), kurz mit G/G/1(b,b) bzw. G/G/1(1,b) bezeichnet.

Diverse Systeme wie zum Beispiel das G/G/1-System konnten bis heute nicht exakt gelöst werden. Deswegen ist man nach wie vor auf approximative Verfahren angewiesen. Eines dieser Verfahren ist die sogenannte Diffusionsapproximation. Das Geheimnis der Diffusionsapproximation beruht auf der Zerlegung des Warteschlangenprozesses  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  in die beiden Komponenten  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch

$$(Q(t))_{t \in [0, \infty)} = (X(t))_{t \in [0, \infty)} + (Y(t))_{t \in [0, \infty)} \quad \forall t \geq 0.$$

Der Teil  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  beschreibt den Zu- und Abfluß des Systems unter der Annahme eines kontinuierlichen Betriebs in  $[0, t]$  (vergleichbar dem Zu- oder Abfluß eines Stausees, solange das System noch nicht leergelaufen ist). Da aber während der Stillstandszeiten des Bedieners keine Bedienkapazität in Anspruch genommen wird, bedarf es einer Korrektur, die in der Komponente  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  zum Ausdruck kommt. Entscheidend ist nun, daß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  für  $t \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 1$  im Sinne der Verteilungskonvergenz durch eine Brownsche Bewegung  $(\tilde{X}(t))_{t \in [0, \infty)}$  approximiert werden kann, und es eine Abbildung  $\Phi$  gibt, die  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  in  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  überführt, d.h.

$$Q(t) = \Phi(X(t))(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Aufgrund der  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  zugrundeliegenden Eigenschaften ist  $\Phi$  eindeutig bestimmt.  $\Phi$  stellt sich als Skorohodsche Reflektionsabbildung heraus. Da  $\Phi$  stetig ist, folgt aus

$$X(t) \stackrel{d}{=} \tilde{X}(t) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 1$$

auch

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \Phi(\tilde{X})(t) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 1.$$

Der Prozeß  $(\Phi(\tilde{X})(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist die sogenannte reflektierte Brownsche Bewegung, deren Verteilungsgesetz bekannt ist.

Will man nun das Verfahren auf allgemeinere Warteschlangensysteme übertragen, stellen sich deshalb ähnliche Probleme: Zuerst, eine geeignete Zerlegung des zugrundeliegenden Warteschlangenprozesses zu finden, so daß zum einen

$$(Q(t))_{t \in [0, \infty)} = (X(t))_{t \in [0, \infty)} + (Y(t))_{t \in [0, \infty)} \quad \forall t \geq 0$$

gilt und zum anderen  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch einen einfacheren Prozeß  $(\tilde{X}(t))_{t \in [0, \infty)}$  approximiert werden kann. Sodann ist eine geeignete Reflektions- bzw. Driftkorrekturabbildung  $\Phi$  zu entwickeln, mit deren Hilfe die Approximation von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  bzw.  $(\tilde{X}(t))_{t \in [0, \infty)}$  auf  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  übertragen werden kann. Allerdings kann man im allgemeinen Fall nicht erwarten, daß man die Verteilung von  $(\Phi(\tilde{X})(t))_{t \in [0, \infty)}$  wie im Beispiel der reflektierten



Brownschen Bewegung in geschlossener Form angeben kann. Deswegen ist ein allgemeinerer Ansatz zu finden, der über eine reflektierte stochastische Differentialgleichung führt.

Dies erklärt den Aufbau der Arbeit. In Kapitel 2 werden wir uns ausführlich mit den unterschiedlichen Charakterisierungen von Diffusionsprozessen beschäftigen. Hierbei spielen die Fokker-Planck-Gleichung und reflektierte stochastische Differentialgleichungen eine entscheidende Rolle. Kapitel 3 ist den Reflektions- und Driftkorrekturabbildungen gewidmet und bildet die mathematische Grundlage für die Approximation von  $G/G/1(b,b)$ - und  $G/G/1(1,b)$ -Warteschlangen.

Kapitel 4 berichtet über die Diffusionsapproximation mittels Fokker-Planck-Gleichung und versucht, eine Einordnung in den allgemeineren Kontext vorzunehmen. In den Kapiteln 5, 6 und 7 wird das neue Verfahren sukzessive auf  $G/G/1$ -,  $G/G/1(b,b)$ - und  $G/G/1(1,b)$ -Systeme angewendet. Numerische Ergebnisse (Kapitel 8 und 9) runden das Thema ab und dokumentieren die Praktikabilität des vorgeschlagenen Verfahrens.



## 2 Diffusionsprozesse

Für die Approximation von Warteschlangenprozessen durch Diffusionsprozesse stellen wir in diesem Kapitel zunächst grundlegende Eigenschaften dieser Klasse von Prozessen bereit. Viele wohlbekannte Ergebnisse werden wir der Übersichtlichkeit halber nur darstellen und nicht beweisen. An den entsprechenden Stellen finden sich weiterführende Literaturangaben.

### 2.1 Stochastische Prozesse und der Raum $D$

**Definition 2.1.** (*Stochastischer Prozeß*)

Ein **stochastischer Prozeß** ist eine Familie von Zufallsvariablen  $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$  über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit Werten in  $(S, \mathcal{S})$ , wobei  $\mathcal{T}$  eine beliebige nichtleere, totalgeordnete Indexmenge ist.

Es wird also für jedes  $t \in \mathcal{T}$  verlangt, daß  $X(\cdot, t)$  eine  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{F}$ -meßbare Abbildung von  $\Omega$  nach  $S$  ist. Die Meßbarkeit der Abbildungen  $X(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow S$  und  $X(\omega, \cdot) : \mathcal{T} \rightarrow S$  wird nicht vorausgesetzt.

Indexmenge  $\mathcal{T}$  kann ganz allgemein jede nichtleere, totalgeordnete Menge sein. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Warteschlangen und ihren Approximationsprozessen bezeichnet  $T$  die Zeit. Deshalb wird stets  $\mathcal{T} = [0, \infty)$  gewählt. Die für ein festes  $\omega$  deterministische Abbildung  $X(\omega, \cdot)$  wird **Pfad** oder Realisierung von  $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$  genannt.

Ebenso kann der Wertebereich oder **Zustandsraum**  $(S, \mathcal{S})$  prinzipiell jeder beliebige Meßraum sein, wird in der Praxis aber fast immer ein Zahlenraum sein. In unserem Fall handelt es sich um die reellen Zahlen mit der Borelschen  $\sigma$ -Algebra.

Beispiele für einen solchen stochastischen Prozeß sind der Temperaturverlauf am morgigen Tag, das Ergebnis des  $n$ -ten Würfelwurfs oder eben die Warteschlangenlänge zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Die Pfade der stochastischen Prozesse, die wir betrachten, werden immer Elemente des folgenden Raumes sein.

**Definition 2.2.** (*Raum der rechtsstetigen Funktionen mit linksseitigen Grenzwerten*)

Sei  $D$  der Raum der Funktionen  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche rechtsstetig sind und in jedem Punkt einen linksseitigen Grenzwert haben.

Dann ist  $\|f\|_{[0,T]} := \sup_{0 \leq x \leq T} |f(x)|$  eine Seminorm auf dem Vektorraum  $D$ . Weiter hat die Abbildung  $\|f\| := \sup_{x \geq 0} |f(x)|$  die Eigenschaften einer Norm auf dem Vektorraum  $D$ ; sie kann allerdings auch den Wert  $\infty$  annehmen. Solch eine Abbildung wird auch definite Pseudonorm genannt.

Sei weiter  $D_0$  die Menge der Elemente  $f$  von  $D$ , für die  $f(0) \geq 0$  gilt.

Dies ist also eine Verallgemeinerung des Stetigkeitsbegriffs für Funktionen, die zusätzlich Sprungstellen zuläßt. Die Pfade vieler wichtiger stochastischer Prozesse haben Sprungstellen, erfüllen aber die Stetigkeitsbedingungen von  $D$ . Insbesondere gilt das auch für die stochastischen Prozesse, die bei unseren Betrachtungen von Warteschlangen und deren Approximation auftauchen.

Für die Konstruktion der Funktionen, die Integralgleichungen oder reflektierte Integralgleichungen lösen, brauchen wir folgende Eigenschaft von  $D$ , wie sie analog auch für die Menge stetiger Funktionen gilt:

**Lemma 2.1.** (Abgeschlossenheit unter gleichmäßiger Konvergenz)

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $D$ , die gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  auch Element von  $D$ .

*Beweis:*

Sei  $x \geq 0$ . Wir zeigen, daß  $f$  in  $x$  rechtsseitig stetig ist und ein linksseitiger Grenzwert existiert.

Nun sei zunächst  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow x$  eine reelle monoton fallende Folge. Dann gibt es ein Kompaktum, daß die gesamte Folge umfaßt. Auf diesem ist die Konvergenz der Funktionenfolge gleichmäßig.

Dann gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $|f(x_n) - f_m(x_n)| < \frac{\epsilon}{3}$  und  $|f_m(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ , das unabhängig von  $n$  ist.

Da  $f_m \in D$  ist, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|f_m(x_n) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ .

Also gilt für genügend großes  $n$ :

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\leq |f(x_n) - f_m(x_n)| + |f_m(x_n) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist  $f$  in  $x$  rechtsstetig.

Sei nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow x$  eine reelle monoton steigende Folge. Sei  $x > 0$ ; für  $x = 0$  braucht keine Existenz eines linksseitigen Grenzwertes gezeigt zu werden.

Auch hier gibt es ein Kompaktum, das die Folge vollständig umfaßt. Auf diesem ist die Konvergenz der Funktionenfolge wieder gleichmäßig. Es gibt also ein  $r \in \mathbb{N}$ , so

daß  $|f(x_n) - f_r(x_n)| \leq \frac{\epsilon}{3}$  und  $|f_r(x_m) - f(x_m)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ . Dieses  $r$  ist dabei wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz unabhängig von  $n$  oder  $m$ .

Da  $f_r \in D$  ist, hat  $f_r$  in  $x$  einen linksseitigen Grenzwert, und  $(f_r(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchyfolge. Deshalb gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $\forall n, m \geq n_0$  gilt:  $|f_r(x_n) - f_r(x_m)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ .

Also gilt  $\forall n, m \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_m)| &\leq |f(x_n) - f_r(x_n)| + |f_r(x_n) - f_r(x_m)| + |f_r(x_m) - f(x_m)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  existiert der linksseitige Grenzwert von  $f$  in  $x$ .

□

## 2.2 Markovprozesse

Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit sind Markovprozesse mit stetiger Zeit und reellwertigem Zustandsraum.

Eine wichtige Klasse von stochastischen Prozessen ist die der Markovprozesse.

**Definition 2.3.** (Markovprozeß)

Ein stochastischer Prozeß  $(X(t))_{t \in T}$  mit Werten in  $(S, \mathcal{S})$  wird **Markovprozeß** genannt, wenn  $\forall t, s_n, s_{n-1}, \dots, s_0 \in T$  mit  $t \geq s_n \geq s_{n-1} \geq \dots \geq s_0$  und  $\forall B \in \mathcal{S}$  gilt:

$$P(X(t) \in B | X(s_n)) = P(X(t) \in B | X(s_n), X(s_{n-1}), \dots, X(s_0)). \quad (2.1)$$

Das heißt, das zukünftige Verhalten des Prozesses hängt nur von dem Zustand in der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab.

Ist der Zustandsraum  $S$  diskret, so ist obige Forderung äquivalent zu der vielleicht etwas anschaulicheren Bedingung

$\forall t, s_n, s_{n-1}, \dots, s_0 \in T$  mit  $t \geq s_n \geq s_{n-1} \geq \dots \geq s_0$  und  $\forall x_t, x_{s_n}, x_{s_{n-1}}, \dots, x_{s_0} \in S$  gilt:

$$\begin{aligned} P(X(t) = x_t | X(s_n) = x_{s_n}) &= \\ P(X(t) = x_t | X(s_n) = x_{s_n}, X(s_{n-1}) = x_{s_{n-1}}, \dots, X(s_0) = x_{s_0}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Solch ein Markovprozeß mit diskreten Zustandsraum wird auch **Markovkette** genannt. Dann bezeichnet man

$$p_{s_n, t}(x_{s_n}, x_t) := P(X(t) = x_t | X(s_n) = x_{s_n})$$

als ihre **Übergangswahrscheinlichkeiten**.

Ist hingegen  $S$  ein Intervall so gilt analog:

$$\begin{aligned} P(X(t) \leq x_t | X(s_n) = x_{s_n}) = \\ P(X(t) \leq x_t | X(s_n) = x_{s_n}, X(s_{n-1}) = x_{s_{n-1}}, \dots, X(s_0) = x_{s_0}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wenn die Verteilungen stetig sind und damit die Dichten existieren, dann gilt (2.3) entsprechend auch für die Dichten. Dies sind alles Formulierungen der sogenannten **Markov-Eigenschaft**, die untereinander äquivalent sind, sofern sie jeweils anwendbar sind.

Existieren die Dichten, so nennt man

$$p(x_t, t, x_{s_n}, s_n) := \frac{\partial}{\partial x_t} P(X(t) \leq x_t | X(s_n) = x_{s_n})$$

ihre **Übergangswahrscheinlichkeitsdichte**.

Für ein diskretes  $S$  gilt die folgende **Chapman-Kolmogorov-Gleichung**

$$P(X(t_2) = s_2 | X(t_0) = s_0) = \sum_{s_1 \in S} P(X(t_2) = s_2 | X(t_1) = s_1) P(X(t_1) = s_1 | X(t_0) = s_0)$$

für alle  $t_2 \geq t_1 \geq t_0$  und  $s_2, s_0 \in S$ .

Ist  $S$  wieder ein Intervall und existieren die Dichten, so nimmt die Chapman-Kolmogorov-Gleichung analog folgende Form an:

$$p(s_2, t_2, s_0, t_0) = \int_S p(s_2, t_2, s_1, t_1) p(s_1, t_1, s_0, t_0) ds_1 \quad (2.4)$$

für alle  $t_2 \geq t_1 \geq t_0$  und  $s_2, s_0 \in S$ .

Mit der Verteilung von  $X(0)$  und der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte, beziehungsweise den Übergangswahrscheinlichkeiten, ist die Verteilung für jedes  $X(t)$  mit  $t \geq 0$  determiniert.

Hängt die bedingte Verteilung von  $X(t) | X(s_n)$  zusätzlich nur von  $t - s_n$  und nicht von  $t$  oder  $s_n$  ab, so spricht man von einem **homogenen** Markovprozeß, beziehungsweise einer homogenen Markovkette. Im diesem häufig betrachteten Fall schreibt man für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{s_0, s_2}(t_2 - t_0) := p_{s_0, s_2}(t_0, t_2)$  beziehungsweise für die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $p(s_2, t_2 - t_0, s_0) := p(s_2, t_2, s_0, t_0)$ .

Eine ausführlichere Darstellung der Theorie von Markovprozessen findet man bei Kalenberg [Kal02] oder Karatzas [Kar91].

## 2.3 Brownsche Bewegung

Das wohl bekannteste Beispiel für einen Markovprozeß mit kontinuierlicher Zeit und reellem Zustandsraum ist die Brownsche Bewegung. Wie der Name vermuten läßt, entstand sie als mathematisches Modell für die Brownsche Molekularbewegung, die vom

schottischen Botaniker Robert Brown 1827 entdeckt wurde. Sie beschreibt die zufällige, gedächtnislose Bewegung eines in einer Flüssigkeit schwebenden Partikels.

**Definition 2.4.** (*Brownsche Bewegung*)

Seien  $s, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$ . Weiter sei  $(Br(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein reellwertiger stochastischer Prozeß mit folgenden Eigenschaften:

- $Br(0) = s$  f.s.
- $Br(t)$  hat stetige Pfade.
- $\forall t \geq s \geq 0$  ist  $Br(t) - Br(s) \stackrel{d}{=} N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$ .
- $\forall t \geq s \geq 0$  ist  $Br(t) - Br(s)$  stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}(Br(u)|0 \leq u \leq s)$ .

Dann heißt  $(Br(t))_{t \in [0, \infty)}$  **Brownsche Bewegung** mit Startwert  $s$ , Drift  $\mu$  und Diffusionskoeffizient  $\sigma$ .

Dieses Modell zur Beschreibung der Brownschen Molekularbewegung geht auf Albert Einstein zurück, aber erst Norbert Wiener [Wie23] gelang 1923 der mit Definition 2.4 einhergehende Existenzbeweis. Ihm zu Ehren wird die standardisierte Brownsche Bewegung mit Startwert 0, Drift 0 und Diffusionskoeffizient 1 **Wiener-Prozeß** genannt.

Aus der dritten aufgeführten Eigenschaft folgt, daß die endlich-dimensionalen Verteilungen von  $(Br(t))_{t \in [0, \infty)}$  bestimmt sind. Darüber hinaus impliziert die an vierter Stelle aufgeführte Unabhängigkeitseigenschaft, daß  $(Br(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein Markovprozeß ist.

**Schreibweise:** Wir schreiben  $(Br(s, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$  für eine Brownsche Bewegung mit Startwert  $s \in \mathbb{R}$ , Drift  $\mu \in \mathbb{R}$  und Diffusionskoeffizient  $\sigma \geq 0$ .

Eine Brownsche Bewegung  $(Br(s, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$  läßt sich mit Hilfe eines Wiener-Prozesses  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  wie folgt schreiben

$$Br(s, \mu, \sigma^2)(t) = s + t\mu + \sigma W(t). \quad (2.5)$$

Deshalb gilt

$$Br(s, \mu, \sigma^2)(t) \stackrel{d}{=} N(s + \mu t, \sigma^2 t). \quad (2.6)$$

Insbesondere hat die Brownsche Bewegung für jedes  $t$  stetige Verteilungen, für deren Dichten die Chapman-Kolmogorov-Gleichung (2.4) gilt.

Die Gleichungen (2.5) und (2.6) implizieren folgende Skalierungseigenschaften. Für einen Wiener-Prozeß  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  gibt es jeweils einen anderen Wiener-Prozeß  $(W^*(t))_{t \in [0, \infty)}$  beziehungsweise für eine Brownsche Bewegung  $(Br(s, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$  eine andere Brownsche Bewegung  $(Br^*(s, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$ , so daß gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{k} W(t) &\stackrel{d}{=} W^*(kt) && \forall k \geq 0 \\ k Br(s, \mu, \sigma^2)(t) &\stackrel{d}{=} Br^*(ks, k\mu, k^2\sigma^2)(t) && \forall k \in \mathbb{R} \\ Br(s, \mu, \sigma^2)(kt) &\stackrel{d}{=} Br^*(s, k\mu, k\sigma^2)(t) && \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Obwohl die Pfade der Brownschen Bewegung stetig sind, sind sie fast sicher nirgends differenzierbar.

Folgende Beschreibung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte werden wir in den nächsten Kapiteln benötigen.

**Theorem 2.1.** (*Fokker-Planck-Gleichung*)

Sei  $p(x, t, y, s) := \frac{\partial}{\partial x} P(X(t) \leq x | X(s) = y)$  die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte einer Brownschen Bewegung  $(Br(c, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$ .

Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y, s) = -\frac{\partial}{\partial x} \mu p(x, t, y, s) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s). \quad (2.7)$$

Die Gleichung (2.7) wird **Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung** oder **Fokker-Planck-Gleichung** genannt.

*Beweis:* Die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte der Brownschen Bewegung ist bekannt:

$$p(x, t, y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y-\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}\right). \quad (2.8)$$

Die Behauptung folgt nun durch Einsetzen von (2.8) in (2.7).

Dazu berechnen wir zunächst folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y-\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) \cdot \\ &\quad \left(-\frac{1}{2(t-s)} + \frac{(x-y)^2}{2\sigma^2(t-s)^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x} p(x, t, y, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y-\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) \cdot \\ &\quad \left(-\frac{x-y-\mu(t-s)}{\sigma^2(t-s)}\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t, y, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y-\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) \cdot \\ &\quad \left(\frac{(x-y-\mu(t-s))^2 - \sigma^2(t-s)}{\sigma^4(t-s)^2}\right). \end{aligned}$$

Dann setzen wir diese Ableitungen in (2.7) ein und dividieren durch den gemeinsamen Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y-\mu(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}\right).$$



Dies ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2(t-s)} + \frac{(x-y)^2}{2\sigma^2(t-s)^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = \\ & -\mu \left( -\frac{x-y-\mu(t-s)}{\sigma^2(t-s)} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{(x-y-\mu(t-s))^2 - \sigma^2(t-s)}{\sigma^4(t-s)^2} \right), \end{aligned}$$

was sich zu  $0 = 0$  auflöst und damit (2.7) beweist.  $\square$

Genauso kann man die **Kolmogorovsche Rückwärtsgleichung** beweisen:

$$-\frac{\partial}{\partial s} p(x, t, y, s) = \mu \frac{\partial}{\partial y} p(x, t, y, s) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p(x, t, y, s). \quad (2.9)$$

Eine tiefere Darstellung der Brownsche Bewegung findet man bei Kallenberg [Kal02], Grigoriu [Gri02] oder Karatzas [Kar91].

## 2.4 Das Itô-Integral

Für die Konstruktion der Diffusionsapproximation verwenden wir das Itô-Integral. Dies ist eine Übertragung des Integralbegriffes auf stochastische Prozesse. Dafür brauchen wir zunächst folgende Begriffe.

**Definition 2.5.** (*Filtrationen*)

Für eine angeordnete Indexmenge  $T$  ist eine **Filtration** eine aufsteigende Folge von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ . Das heißt, es gilt  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  für  $s \leq t$ .

Im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen stellt eine Filtration die mit der Zeit zunehmende Information dar. Für einen stochastischen Prozeß  $(X(t))_{t \in T}$  nennt man die Filtration  $(\mathcal{F}(X(t')|t' \leq t))_{t \in T}$  die von  $(X(t))_{t \in T}$  erzeugte Filtration.

Zunächst definieren wir das Itô-Integral für elementare stochastische Prozesse.

**Definition 2.6.** (*Elementarer stochastischer Prozeß*)

Sei  $(X(t))_{t \in T}$  ein reellwertiger stochastischer Prozeß mit  $T = [0, \infty)$ .  $(X(t))_{t \in T}$  ist ein **elementarer stochastischer Prozeß** bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , wenn folgende Bedingungen gelten:

- $X(t)$  ist für alle  $t \geq 0$   $\mathcal{F}_t$ -meßbar.
- Es gibt eine feste Zerlegung von  $[0, \infty)$ , auf der  $(X(t))_{t \in T}$  abschnittsweise konstant ist. Das heißt, es gibt  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  und

$$\forall \omega \in \Omega \forall i \in \mathbb{N} \forall t \in [t_{i-1}, t_i) \text{ gilt } X_t(\omega) = X_{t_{i-1}}(\omega).$$

- $E(X_t^2) < \infty$  für alle  $t \geq 0$ .

Damit ist nun die erste einfache Definition des Itô-Integrals möglich:

**Definition 2.7.** (*Itô-Integral für elementare stochastische Prozesse*)

Sei  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein Wiener-Prozeß. Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein elementarer stochastischer Prozeß bezüglich der von  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  erzeugten Filtration und  $0 \leq a \leq b$ .

Dann sei  $I_{X,a,b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$I_{X,a,b} := \sum_{\{i \in \mathbb{N} | a < t_i \wedge t_{i-1} < b\}} X(t_{i-1})(W(\max(t_i, b)) - W(\min(t_{i-1}, a))).$$

Der Ausdruck  $I_{X,a,b}$  ist also eine  $\mathcal{F}(W(b))$ -meßbare Zufallsvariable. Nun nennt man  $I_{X,a,b}$  **Itô-Integral** und schreibt

$$\int_a^b X(s) dW(s) := I_{X,a,b}.$$

Das Integral wird also pfadweise wie das Stieltjes-Integral für Treppenfunktionen definiert. Die Wohldefiniertheit folgt deshalb pfadweise wie bei der Definition des Stieltjes-Integrals. Allerdings kann man ab hier nicht einfach die Konstruktion des Stieltjes-Integrals weiter pfadweise fortsetzen, weil der Wiener-Prozeß  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  bereits auf Kompakta unbeschränkte Variation hat. Zwischen dem pfadweisen und dem Itô-Integral elementarer Prozesse besteht folgender Zusammenhang:

**Theorem 2.2.** (*Itô-Isometrie für elementare stochastische Prozesse*)

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein elementarer stochastischer Prozeß bezüglich der von  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  erzeugten Filtration und  $0 \leq a \leq b$ . Dann gilt:

$$E \left( \left( \int_a^b X(s) dW(s) \right)^2 \right) = E \left( \int_a^b X^2(s) ds \right). \quad (2.10)$$

Dieser Zusammenhang kann zu einer Erweiterung des Itô-Integrals genutzt werden.

**Definition 2.8.** (*Approximierbare Prozesse*)

Sei  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  eine Filtration in der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  und sei  $B([0, \infty))$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $[0, \infty)$ . Sei weiter  $\Pi$  die Menge aller stochastischen Prozesse  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , für die gilt:

- $Y_t$  ist  $\mathcal{F}_t$ -meßbar  $\forall t \geq 0$ .
- $Y : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $B([0, \infty)) \times \mathcal{F}$ -meßbar.
- $E(\int_0^t Y^2(s) ds) < \infty \forall t \geq 0$ .

Die Menge  $\Pi$  nennen wir **Menge der bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  approximierbaren Prozesse**.

Diese Namensgebung wird durch folgenden Satz gerechtfertigt.

**Theorem 2.3.**

Sei  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)} \in \Pi$ . Dann gibt es eine Folge  $((X_n(t))_{t \in [0, \infty)})_{n \in \mathbb{N}}$  von elementaren stochastischen Prozessen bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , so daß gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \int_0^t |Y(s) - X_n(s)|^2 ds \right) = 0. \quad (2.11)$$

Diese Approximation ermöglicht nun, die Definition des Itô-Integrals für elementare Prozesse auf approximierbare Prozesse zu übertragen.

**Theorem 2.4.**

Sei  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein bezüglich der von  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  erzeugten Filtration approximierbarer Prozeß und  $0 \leq a \leq b$ .

Dann gilt:

- Es gibt eine Folge  $((X_n(t))_{t \in [0, \infty)})_{n \in \mathbb{N}}$  von elementaren stochastischen Prozessen bezüglich der von  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  erzeugten Filtration, so daß gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \int_a^b |Y(s) - X_n(s)|^2 ds \right) = 0.$$

- Es gibt eine  $\mathcal{F}(W(t))$ -meßbare Zufallsvariable  $I_{Y,a,b}$ , so daß gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \left| I_{Y,a,b} - \int_a^b X_n(s) dW(s) \right|^2 \right) = 0. \quad (2.12)$$

- $I_{Y,a,b}$  ist fast sicher eindeutig.

Damit können wir das Itô-Integral wie folgt definieren.

**Definition 2.9.** (Itô-Integral)

Sei  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein bezüglich der von  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  erzeugten Filtration approximierbarer Prozeß und  $0 \leq a \leq b$ . Dann nennt man

$$\int_a^b Y(s) dW(s) := I_{Y,a,b}$$

**Itô-Integral.**

Weiterhin gilt auch für diesen erweiterten Integral-Begriff die Itô-Isometrie.

**Theorem 2.5.** (*Itô-Isometrie*)

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein bezüglich der von  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  erzeugten Filtration approximierbarer Prozeß und  $0 \leq a \leq b$ . Dann gilt:

$$E \left( \left( \int_a^b X(s) dW(s) \right)^2 \right) = E \left( \int_a^b X^2(s) ds \right). \quad (2.13)$$

Weiter gelten folgende Beziehungen:

**Lemma 2.2.** (*Eigenschaften*)

Seien  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  bezüglich der von  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  erzeugten Filtration approximierbare Prozesse und  $0 \leq a \leq b \leq c$ . Sei  $k \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt:

$$\int_a^c X(s) dW(s) = \int_a^b X(s) dW(s) + \int_b^c X(s) dW(s) \quad f.s. \quad (2.14)$$

$$\int_a^b kX(s) + Y(s) dW(s) = k \int_a^b X(s) dW(s) + \int_a^b Y(s) dW(s) \quad f.s. \quad (2.15)$$

$$E \left( \int_a^b X(s) dW(s) \right) = 0 \quad (2.16)$$

$$\int_a^b X(s) dW(s) \text{ ist f.s. pfadweise stetig in } a \text{ und } b. \quad (2.17)$$

Aus (2.14) und (2.16) folgt, daß das Itô-Integral ein Martingal ist.

Das Itô-Integral wird für andere Anwendungen auch mit wesentlich allgemeineren Integranden und Integratoren definiert. Eine tiefergehende Darstellung des Itô-Integrals findet man bei Kallenberg [Kal02], Grigoriu [Gri02], Øksendal [Øks03], Ikeda [Ike89] oder Karatzas [Kar91].

## 2.5 Diffusionsprozesse und stochastische Differentialgleichungen

Für Bediensysteme mit Gruppenbedienung werden wir in Kapitel 6 eine Diffusionsapproximation in Form einer stochastischen Differentialgleichung formulieren. Dafür fassen wir hier nun die notwendigen Grundlagen der Theorie der stochastischen Differentialgleichungen zusammen.

**Definition 2.10.** (*Stochastische Differentialgleichungen*)

Seien  $\sigma, \mu : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und Lipschitz-stetig<sup>1</sup>. Sei  $\sigma > 0$  und  $X(0)$  eine von dem Wiener-Prozeß  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  stochastisch unabhängige Zufallsvariable.

Dann nennt man

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \quad (2.18)$$

eine **stochastische Differentialgleichung**.

Ein (reellwertiger) stochastischer Prozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  löst die stochastische Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s). \quad (2.19)$$

Dann nennt man  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  einen **(Itô-)Diffusionsprozeß**. Verkürzt wird auch nur von einer **Diffusion** gesprochen.

Wir kürzen stochastische Differentialgleichung mit SDE ab (abgeleitet von dem englischen Begriff “stochastic differential equation”). Der Koeffizient  $\mu$  wird **Drift** genannt und der Koeffizient  $\sigma$  **Diffusionskoeffizient**.

Anschaulich ist  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  also ein Prozeß, der gegeben  $X(t) = x$  für einen infinitesimalen Zeitraum einer Brownschen Bewegung  $(Br(x, \mu(t, x), \sigma(t, x))(t))_{t \in [0, \infty)}$  entspricht. Das heißt, für kleine  $t_0$  ist  $X(t + t_0)$  gegeben  $X(t) = x$  verteilt wie die Brownschen Bewegung  $Br(x, \mu(t, x), \sigma(t, x))(t_0)$ .

Man beachte, daß es sich in (2.19) bei dem zweiten Integral um das oben definierte Itô-Integral handelt. Die Pfade des Diffusionsprozesses sind fast sicher stetig, weil auch die Realisierungen des Itô-Integrals fast sicher stetig sind.

Natürlich können auch stochastische Differentialgleichungen mit schwächeren Voraussetzungen an die Koeffizienten  $\sigma$  und  $\mu$  als in Definition 2.10 betrachtet werden, allerdings müssen dann viele Spezialfälle besonders behandelt werden. Da wir diese Allgemeinheit nicht benötigen, verzichten wir im Sinne einer größeren Klarheit darauf.

Die Frage, ob es zu gegebenen Koeffizienten und gegebenem Wiener-Prozeß einen Diffusionsprozeß gibt, und ob dieser mit ihnen eindeutig bestimmt ist, beantworten die nachfolgenden Theoreme:

**Theorem 2.6.** (*Existenz eines Diffusionsprozesses*)

Es gibt eine stetige, quadratisch integrierbare Lösung  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  von (2.18).

*Beweis:* Siehe Theorem 5.2.9 in [Kar91], Theorem 5.2.1 in [Øks03] oder Theorem IV.2.2 in [Ike89]. □

---

<sup>1</sup>Da auf  $\mathbb{R}^2$  alle Normen äquivalent sind, ist die Lipschitz-Stetigkeit, allerdings nicht die Lipschitz-Konstante, unabhängig von der konkret gewählten Norm.

**Theorem 2.7.** *(Eindeutigkeit des Diffusionsprozesses)*

Für ein gegebenes  $X(0)$  (auch als Zufallsvariable) ist die Lösung  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  von (2.18) f.s. eindeutig.

*Beweis:* Siehe Theorem 5.2.5 in [Kar91], Theorem 5.2.1 in [Øks03] oder Theorem IV.3.3 in [Ike89].  $\square$

Das heißt für gegebene  $\sigma, \mu : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und Lipschitz-stetig,  $\sigma > 0$  und  $X(0)$  stochastisch unabhängig von dem Wiener-Prozeß  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  gibt es einen fast sicher eindeutigen Diffusionsprozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ . Ohne gegebenes  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist zumindest seine Verteilung eindeutig bestimmt.

Geschlossene Lösungen von (2.18) sind nur für Spezialfälle bekannt. In den übrigen Fällen ist man auf Monte-Carlo-Simulation angewiesen (siehe [Klo99]).

Folgendes Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen dem lokalen Verhalten eines Diffusionsprozesses und seinen Koeffizienten genauer:

**Theorem 2.8.** *(Charakterisierung der Koeffizienten)*

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein Diffusionsprozeß, der (2.18) erfüllt. Dann gilt für alle  $t, s, \epsilon \geq 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $t \rightarrow 0+$ :

$$E((X(s+t) - X(s)) \mathbf{1}_{\{|X(s+t) - X(s)| \leq \epsilon\}} | X(s) = x) = t\mu(s, x) + o(t) \quad (2.20)$$

$$E((X(s+t) - X(s))^2 \mathbf{1}_{\{|X(s+t) - X(s)| \leq \epsilon\}} | X(s) = x) = t\sigma^2(s, x) + o(t) \quad (2.21)$$

$$P(|X(s+t) - X(s)| > \epsilon | X(s) = x) = o(t). \quad (2.22)$$

Vor allem in älterer Literatur findet man häufig auch eine Definition des Begriffs Diffusionsprozeß über diese Eigenschaften zusammen mit der Stetigkeit der Pfade. Oft führen diese beiden verschiedenen Definitionen zu einer deutlich unterschiedlichen Theorieentwicklung. Leider findet sich eine Darstellung ihres Zusammenhangs eher selten. Dies leistet aber zum Beispiel Bhattacharya in [Bha90].

Ein entscheidendes Theorem der stochastischen Analysis ist der folgende Satz von Itô, den wir für das weitere Vorgehen benötigen. Dies ist gewissermaßen eine Übertragung der Kettenregel auf das Itô-Integral und gilt im Übrigen auch für allgemeinere Klassen von Prozessen.

**Theorem 2.9.** *(Satz von Itô)*

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  eine Diffusion mit (2.18) und  $f \in C^2(\mathbb{R})$ .

Dann gilt:

$$df(X(t)) = f'(X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t)) \sigma(t, X(t))^2 dt. \quad (2.23)$$

*Beweis:* Der Beweis findet sich in [Gri02] auf Seite 238 oder in [Kal02] auf Seite 340.  $\square$

Die folgende Martingal-Eigenschaft ist charakteristisch für Diffusionsprozesse:

**Theorem 2.10.** (*Martingal-Eigenschaft*)

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  eine Diffusion beziehungsweise eine Lösung von

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t). \quad (2.24)$$

Dann gilt für alle beschränkten  $f \in C^2(\mathbb{R})$ :

$$f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t \frac{1}{2} \sigma(s, X(s))^2 f''(X(s)) + \mu(s, X(s)) f'(X(s)) ds \quad (2.25)$$

ist ein stetiges Martingal.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} & f(X(t)) - f(X(0)) - \int_0^t \frac{1}{2} \sigma(s, X(s))^2 f''(X(s)) + \mu(s, X(s)) f'(X(s)) ds \\ \stackrel{\text{Theorem 2.9}}{=} & \int_0^t f'(X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s)) \sigma(s, X(s))^2 ds \\ & - \int_0^t \frac{1}{2} \sigma(s, X(s))^2 f''(X(s)) + \mu(s, X(s)) f'(X(s)) ds \\ = & \int_0^t f'(X(s)) dX(s) - \int_0^t \mu(s, X(s)) f'(X(s)) ds \\ \stackrel{(2.24)}{=} & \int_0^t f'(X(s)) \mu(s, X(s)) ds + \int_0^t f'(X(s)) \sigma(s, X(s)) dW(s) \\ & - \int_0^t \mu(s, X(s)) f'(X(s)) ds \\ = & \int_0^t \sigma(s, X(s)) f'(X(s)) dW(s) \end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung, weil dieses Itô-Integral selbst ein stetiges Martingal ist.  $\square$

Man kann zeigen, daß diese Eigenschaft eines Diffusionsprozesses sogar äquivalent zu (2.18) ist. Daher wird der Begriff Diffusionsprozeß manchmal auch über (2.25) definiert. Dieser Zusammenhang wird in [Str79] genauer dargestellt.

Die folgende wichtige Eigenschaft eines Diffusionsprozesses erwartet man intuitiv.

**Lemma 2.3.** (*Markoveigenschaft*)

Ein Diffusionsprozeß ist ein Markovprozeß.

*Beweis:*

Seien  $T, \tau > 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
X(T + \tau) &= X(0) + \int_0^{T+\tau} \mu(s, X(s))ds + \int_0^{T+\tau} \sigma(s, X(s))dW(s) \\
&= X(0) + \int_0^T \mu(s, X(s))ds + \int_0^T \sigma(s, X(s))dW(s) + \\
&\quad \int_T^{T+\tau} \mu(s, X(s))ds + \int_T^{T+\tau} \sigma(s, X(s))dW(s) \\
&= X(T) + \int_T^{T+\tau} \mu(s, X(s))ds + \int_T^{T+\tau} \sigma(s, X(s))dW(s).
\end{aligned}$$

Gegeben  $X(T)$  sind alle drei Summanden stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}(X(s)|s \in [0, T])$ , also ist auch  $X(T + \tau)$  gegeben  $X(T)$  stochastisch unabhängig von  $\mathcal{F}(X(s)|s \in [0, T])$ .  $\square$

Ein älterer Ansatz der Diffusionsapproximation beruht auf der Verwendung der Fokker-Planck-Gleichung. Um den Zusammenhang zwischen diesem und dem in dieser Arbeit entwickelten Ansatz aufzuzeigen, benötigen wir das folgende Theorem.

**Theorem 2.11.** *(Zusammenhang mit der Fokker-Planck-Gleichung)*

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  eine Diffusion beziehungsweise eine Lösung von

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \quad (2.26)$$

mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(t, x)$ . Dann erfüllt  $p(t, x)$  die **Fokker-Planck-Gleichung** oder **Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} \mu(t, x)p(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x). \quad (2.27)$$

*Beweis:*

Sei  $f \in C^2(\mathbb{R})$  eine beliebige zweimal stetig differenzierbare, beschränkte, reelle Funktion.

Mit Hilfe von (2.23) und (2.26) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
E[f(X(t)) - f(X(0))] &= E \left[ \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s))\sigma(s, X(s))^2 ds \right] \\
&= E \left[ \int_0^t f'(X(s))\mu(s, X(s))ds + \right. \\
&\quad \left. \int_0^t f'(X(s))\sigma(s, X(s))dW(s) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s))\sigma(s, X(s))^2 ds \right] \\
&= E \left[ \int_0^t f'(X(s))\mu(s, X(s)) + \frac{1}{2} f''(X(s))\sigma(s, X(s))^2 ds \right].
\end{aligned}$$



Durch Differentiation nach  $t$  folgt:

$$\frac{d}{dt}E[f(X(t))] = E\left[f'(X(t))\mu(t, X(t)) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma(t, X(t))^2\right]. \quad (2.28)$$

Wir lösen die Erwartungswerte auf:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial t} p(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \mu(t, x) p(t, x) dx + \frac{1}{2} f''(x) \sigma(t, x)^2 p(t, x) dx. \quad (2.29)$$

Mit mehrfacher partieller Integration folgt weiter:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial t} p(t, x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \mu(t, x) p(t, x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) dx \\ &= \left[ f(x) \mu(t, x) p(t, x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (\mu(t, x) p(t, x)) dx + \\ &\quad \left[ f'(x) \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \right) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (\mu(t, x) p(t, x)) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \right) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} (\mu(t, x) p(t, x)) dx - \\ &\quad \left[ f(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( - \frac{\partial}{\partial x} (\mu(t, x) p(t, x)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Da (2.30) für beliebiges beschränktes  $f \in C^2(\mathbb{R})$  gilt, folgt die Gültigkeit der Fokker-Planck-Gleichung.  $\square$

Es gilt auch die **Kolmogorovsche Rückwärtsgleichung**:

$$- \frac{\partial}{\partial s} p(x, t, y, s) = \mu(s, y) \frac{\partial}{\partial y} p(x, t, y, s) + \frac{\sigma(s, y)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p(x, t, y, s), \quad (2.31)$$

wobei  $p(x, t, y, s) := \frac{\partial}{\partial x} P(X(t) \leq x | X(s) = y)$  die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte der Diffusion ist.

Ausführlichere Darstellungen von Diffusionsprozessen finden sich zum Beispiel in [Bha90] oder in [Gri02].

## 2.6 Zählprozesse

In den folgenden Kapiteln werden wir sehen, daß sich der Warteschlangenprozeß bestimmter Warteschlangensysteme aus Zählprozessen zusammensetzt. Entsprechend skalierte Zählprozesse aber wiederum konvergieren gegen eine Brownsche Bewegung. Diese Erkenntnis ist die Grundidee der Diffusionsapproximation. Deshalb führen wir an dieser Stelle zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Summationsprozessen und ihren korrespondierenden Zählprozessen ein.

**Schreibweise:** Für  $r \in \mathbb{R}$  sei  $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$  die größte ganze Zahl, so daß  $\lfloor r \rfloor \leq r$ .

**Definition 2.11.** (*Summations- und Zählprozesse*)

Sei  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von i.i.d. nicht-negativen Zufallsvariablen mit  $m := E(\xi_i) \in (0, \infty)$  und  $\sigma^2 := \text{Var}(\xi_i) \in (0, \infty)$ .

Dann wird  $S(t) := \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} \xi_i$ ,  $t \geq 0$  **Summationsprozeß** genannt, und der dazugehörige **Zählprozeß** ist  $Z(t) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S(n) \leq t\}$ ,  $t \geq 0$ .

**Schreibweise:** Für zwei Zufallsvariablen  $A(r), B(r)$ , die von einem Parameter  $r \in \mathbb{R}$  abhängen, und  $s \in [-\infty, \infty]$  schreiben wir

$$A(r) \xrightarrow[r \rightarrow s]{d} B(r)$$

genau dann, wenn für ihre Verteilungsfunktionen  $F_{A(r)}$  und  $F_{B(r)}$   $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt

$$|F_{A(r)}(x) - F_{B(r)}(x)| \xrightarrow[r \rightarrow s]{} 0.$$

Da wir für die  $x \in \mathbb{R}$  keine Unstetigkeitsstellen ausschließen, ist dieser Konvergenzbegriff etwas stärker, als die übliche Definition der Konvergenz in Verteilung über die Verteilungsfunktionen. Letztere wäre nicht direkt übertragbar, weil die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $F_{B(r)}$  von  $r$  abhängt, und es so keine direkt wohldefinierte Menge von Unstetigkeitsstellen gibt. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese Zufallsvariablen aber immer stetige Verteilungen haben, so daß der beschriebene Unterschied nicht zum Tragen kommt.

Für Zählprozesse existiert ein zentraler Grenzwertsatz.

**Theorem 2.12.** (*Annäherung durch die Normalverteilung*)

Für jeden Zählprozeß  $(Z(t))_{t \in [0, \infty)}$  gilt

$$Z(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} N\left(\frac{t}{m}, \frac{t\sigma^2}{m^3}\right), \quad (2.32)$$

mit den Bezeichnungen aus Definition 2.11.

*Beweis:*

Die Behauptung ist äquivalent zu folgender Aussage, die wir beweisen wollen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left( \frac{Z(t) - \frac{t}{m}}{\sqrt{t \frac{\sigma^2}{m^3}}} \leq x \right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zunächst definieren wir die beiden Hilfsfunktionen:

$$h(t) := x \sqrt{t \frac{\sigma^2}{m^3}} + \frac{t}{m} \quad (2.33)$$

$$g(t) := \frac{t - m(h(t) + 1)}{\sigma \sqrt{h(t) + 1}}. \quad (2.34)$$

Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - m(h(t) + 1)}{\sigma \sqrt{h(t) + 1}} \\ &\stackrel{(2.33)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-x \sqrt{t \frac{\sigma^2}{m^3}} - m}{\sigma \sqrt{h(t) + 1}} \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-x(\frac{\sigma^2}{m})(\frac{1}{2})(t \frac{\sigma^2}{m^3})^{-\frac{1}{2}}}{\sigma(\frac{1}{2})(h(t) + 1)^{-\frac{1}{2}} h'(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-x \sqrt{h(t) + 1}}{h'(t) \sqrt{m} \sqrt{t}} \\ &\stackrel{(2.33)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-x \sqrt{x \sqrt{t \frac{\sigma^2}{m^3}} + \frac{t}{m} + 1}}{(\frac{x}{2} t^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma^2 m^{-3}} + m^{-1}) \sqrt{m} \sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-x \sqrt{\frac{t}{m}}}{m^{-1} \sqrt{m} \sqrt{t}} \\ &= -x. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Diese Teilergebnisse setzen wir nun zusammen:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} P \left( \frac{Z(t) - \frac{t}{m}}{\sqrt{t \frac{\sigma^2}{m^3}}} \leq x \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P (Z(t) \leq h(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} P (S(\lfloor h(t) + 1 \rfloor) > t) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} P \left( \frac{S(\lfloor h(t) + 1 \rfloor) - m(h(t) + 1)}{\sigma \sqrt{h(t) + 1}} > g(t) \right) \\
&\stackrel{(2.35)}{=} \lim_{t' \rightarrow \infty} P \left( \frac{S(t') - mt'}{\sigma \sqrt{t'}} > -x \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - mn}{\sigma \sqrt{n}} > -x \right) \\
&\stackrel{\text{Zentraler Grenzwertsatz}}{=} 1 - \Phi(-x) \\
&= \Phi(x).
\end{aligned}$$

□

Mit der eingeführten Schreibweise können wir die Aussage aus Theorem 2.12 auch folgendermaßen formulieren:

$$Z(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br \left( 0, \frac{1}{m}, \frac{\sigma^2}{m^3} \right) (t). \quad (2.36)$$

Es zeigt, daß die Verteilungen von  $Z(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  immer stärker die Form einer Normalverteilung annehmen.

## 3 Reflektion

Da Diffusionsprozesse auch negative Werte annehmen können, eignen sie sich für die Approximation von Warteschlangensystemen nur bedingt. Deswegen werden in diesem Kapitel Verfahren zur Transformation bzw. Reflektion von Diffusionsprozessen vorgestellt, die sicherstellen sollen, daß nur nicht-negative Werte angenommen werden. Diese Transformationen werden insbesondere so gewählt, daß die grundlegenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften der Diffusionsprozesse und der zu approximierenden Warteschlangenprozesse erhalten bleiben.

### 3.1 Die Reflektionsabbildung

Aber was passiert, wenn eine Funktion die 0-Schranke nicht überschreiten kann und an dieser sozusagen ins Positive abgelenkt wird? In diesem Fall soll zu einer Funktion  $x : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  eine reflektierte Funktion  $q : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  konstruiert werden, die oberhalb von 0 die Bewegungen von  $x$  nachzeichnet. Diese Fragestellung ist in der Literatur auch unter dem Begriff des Skorohod-Problems bekannt.

Abbildung 3.1 zeigt beispielhaft eine solche Funktion  $x$ , die an der 0-Schranke reflektiert wird, indem zu ihr die Funktion  $y$  addiert wird. Das Ergebnis, also die reflektierte Funktion, ist  $q$ . Die Bedingungen des folgenden Lemmas 3.3 fassen den Zusammenhang zwischen den Funktionen formal zusammen:

Gleichung (3.1) beinhaltet, daß die reflektierte Funktion  $q$  durch Addition der Ausgleichsfunktion  $y$ , genannt Regulator, zu  $x$  entsteht und nicht-negativ ist. Der Regulator  $y$  beginnt nach (3.2) in 0 und ist monoton nicht fallend, da bei jedem Erreichen der 0-Schranke von  $q$  mehr addiert werden muß, damit diese nicht überschritten wird. Bedingung (3.3) ist darin begründet, daß  $y$  genau dann steigt, wenn  $q$  die 0 erreicht hat. Dabei sorgt wiederum (3.1) dafür, daß  $y$  genau so stark steigt, wie  $x$  fällt, so daß die Summe  $q$  konstant 0 bleibt, bis  $x$  wieder zu steigen beginnt.

Daher liefert also das folgende Lemma die gesuchte reflektierte Funktion und den dafür benötigten Regulator.

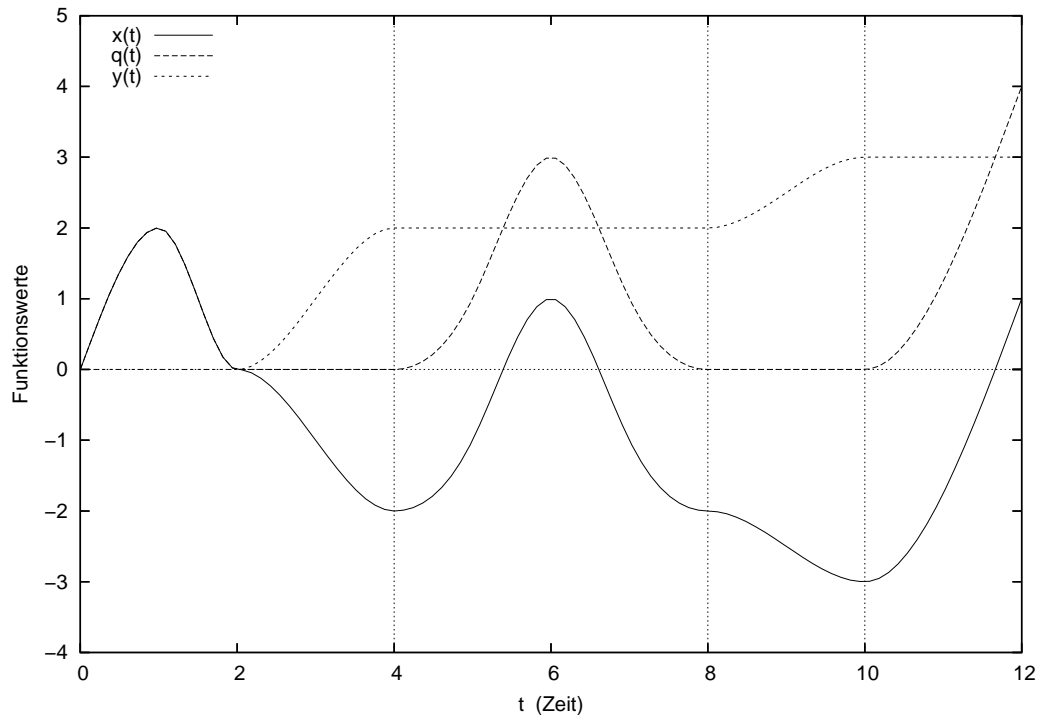


Abbildung 3.1: Skorohodsche Reflektion

**Lemma 3.1.** (*Skorohod-Problem*)

Für jedes  $x \in D$  mit  $x(0) \geq 0$  gibt es genau ein Paar  $y, q \in D$ , für das gilt:

$$q = x + y \geq 0 \quad (3.1)$$

$$y(0) = 0 \text{ und } y \text{ monoton nicht fallend} \quad (3.2)$$

$$\int_0^t q(s) dy(s) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

$y$  und  $q$  haben dann (mit  $t \geq 0$ ) die Form:

$$y(t) = \sup_{s \in [0, t]} x^-(s) \quad (3.4)$$

$$q(t) = x(t) + \sup_{s \in [0, t]} x^-(s). \quad (3.5)$$

*Beweis:*

Offensichtlich erfüllt die Funktion  $y$  aus (3.4) die Bedingung (3.2). Auch  $q = x + y$  ist klar. Außerdem gilt für  $t \geq 0$

$$x^-(t) \leq \sup_{s \in [0, t]} (x^-(s))$$

und damit

$$q(t) = x(t) + y(t) = x^+(t) - x^-(t) + \sup_{s \in [0, t]} (x^-(s)) \geq 0.$$

Es bleibt (3.3) zu zeigen.

Wenn für ein  $t$  der Regulator  $y$  auf keiner offenen Umgebung  $U(t)$  konstant ist, wird das Supremum in (3.4) für dieses  $t$  angenommen. Also gilt entsprechend

$$y(t) = \sup_{s \in [0, t]} x^-(s) = x^-(t) = -x(t)$$

und damit  $q(t) = 0$ . Das heißt, entweder ist  $y$  konstant auf einer offenen Umgebung  $U(t)$  oder  $q(t) = 0$ , was  $\int_0^t q(s) dy(s) = 0$  impliziert.

Somit ist gezeigt, daß  $y$  und  $q$  die genannten Bedingungen erfüllen. Es bleibt zu zeigen, daß  $y$  und  $q$  eindeutig bestimmt sind.

Sei  $(y', q') \in D \times D$  ein weiteres Paar von Funktionen, das (3.1) bis (3.3) erfüllt. Deshalb:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}(q(t) - q'(t))^2 \\ &= \int_0^t (q(s) - q'(s))d(q(s) - q'(s)) \\ &\stackrel{q - q' \equiv y - y'}{=} \int_0^t (q(s) - q'(s))d(y(s) - y'(s)) \\ &= \int_0^t q(s)dy(s) - \int_0^t q'(s)dy(s) - \int_0^t q(s)d'y(s) + \int_0^t q'(s)dy'(s) \\ &\stackrel{(3.3)}{=} - \int_0^t q'(s)dy(s) - \int_0^t q(s)dy'(s) \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Ungleichung (3.6) folgt, weil  $q, q' \geq 0$  und  $y, y'$  monoton steigend sind. Insgesamt gilt also  $q = q'$  und somit  $y = y'$ .  $\square$

Diese Beziehung können wir nun für folgende Definition nutzen.

**Definition 3.1.** (*Reflektion*)

Definiere  $\Psi : D_0 \rightarrow D$  durch

$$\Psi(x)(t) := \sup_{s \in [0, t]} x^-(s) \quad \forall t \geq 0. \tag{3.7}$$

Die Bildfunktion  $\Psi(x)$  wird **Regulator** von  $x$  genannt.

Sei  $\Phi : D_0 \rightarrow D$  mit

$$\Phi(x)(t) := x(t) + \sup_{s \in [0, t]} x^-(s) \quad \forall t \geq 0. \tag{3.8}$$

Die Bildfunktion  $\Phi(x)$  wird der **reflektierte Prozeß** von  $x$  genannt.

Für  $x \in D$  erfüllen die Funktionen  $x$ ,  $\Psi(x)$  und  $\Phi(x)$  die Relationen (3.1) bis (3.3). Durch obiges Lemma wissen wir, daß  $\Psi(x)$  und  $\Phi(x)$  dadurch eindeutig bestimmt sind.

Aus vorangegangenen Überlegungen ergibt sich, daß durch  $\Psi(x)$  gerade so viel zu  $x$  addiert wird, wie mindestens nötig ist, um  $\Phi(x) = x + \Psi(x) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$  zu garantieren, und die Bewegungen von  $\Phi(x)$  entsprechen den Bewegungen von  $x$ , mit der Ausnahme, daß der reflektierte Prozeß anschaulich an der 0-Schranke aufgefangen wird, statt sie zu überschreiten.

**Lemma 3.2.** (*Lipschitz-Stetigkeit*)

Die Abbildungen  $\Psi$  und  $\Phi : (D_0, \|\cdot\|_{[0,T]}) \rightarrow (D, \|\cdot\|_{[0,T]})$  sind für alle  $T \geq 0$  Lipschitz-stetig. Sie haben dabei die Lipschitz-Konstanten 1 beziehungsweise 2.

*Beweis:*

Zuerst rechnen wir die Lipschitz-Stetigkeit von  $\Psi$  nach:

$$\begin{aligned}
\|\Psi(x) - \Psi(y)\|_{[0,T]} &= \sup_{t \in [0,T]} \left| \sup_{s \in [0,t]} x^-(s) - \sup_{s \in [0,t]} y^-(s) \right| \\
&= \sup_{t \in [0,T]} \left| \sup_{s \in [0,t]} (x - y + y)^-(s) - \sup_{s \in [0,t]} y^-(s) \right| \\
&\leq \sup_{t \in [0,T]} \left| \sup_{s \in [0,t]} (x - y)^-(s) + \sup_{s \in [0,t]} y^-(s) - \sup_{s \in [0,t]} y^-(s) \right| \\
&= \sup_{t \in [0,T]} \left| \sup_{s \in [0,t]} (x - y)^-(s) \right| \\
&\leq \sup_{t \in [0,T]} |(x - y)(t)| \\
&= \|x - y\|_{[0,T]}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt für  $\Phi$ :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{[0,T]} &\leq \|x(t) - y(t)\|_{[0,T]} + \left\| \sup_{s \in [0,t]} x^-(s) - \sup_{s \in [0,t]} y^-(s) \right\|_{[0,T]} \\
&= \|x - y\|_{[0,T]} + \|\Psi(x) - \Psi(y)\|_{[0,T]} \\
&\leq \|x - y\|_{[0,T]} + \|x - y\|_{[0,T]}.
\end{aligned}$$

□

## 3.2 Reflektierte Brownsche Bewegung

Die Diffusionsapproximation verwendet als Approximationsprozesse zur Brownschen Bewegung verwandte Prozesse. In einem Fall werden wir als Approximationsprozeß die reflektierte Brownsche Bewegung verwenden.



**Definition 3.2.** (Reflektierte Brownsche Bewegung)

Sei  $(Br(t))_{t \in [0, \infty)}$  eine Brownsche Bewegung, beginnend in  $s \in \mathbb{R}$ , mit Drift  $\mu \in \mathbb{R}$  und Diffusionskoeffizient  $\sigma \geq 0$ . Weiter sei  $\Phi$  die Abbildung aus Definition 3.1.

Dann wird  $(\Phi(Br)(t))_{t \in [0, \infty)}$  als **reflektierte Brownsche Bewegung** bezeichnet (im Englischen “reflected Brownian motion” oder auch “regulated Brownian motion”). Wir kürzen diesen Prozeß als  $(RBr(s, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$  ab.

Die reflektierte Brownsche Bewegung  $(\Phi(Br)(t))_{t \in [0, \infty)}$  entsteht aus der pfadweisen Anwendung der Reflektionsabbildung auf  $(Br(t))_{t \in [0, \infty)}$ .

Insbesondere ist  $RBr(s, \mu, \sigma^2) \geq 0$ . Die Markoveigenschaft von  $RBr(s, \mu, \sigma^2)$  ergibt sich aus der Markoveigenschaft der ihr zu Grunde liegenden Brownschen Bewegung.

Mit der reflektierten Brownschen Bewegung haben sich Abate und Whitt, [Aba87a] und [Aba87b], beschäftigt. Von ihnen stammen die folgenden Ergebnisse:

**Theorem 3.1.** (Verteilung der reflektierten Brownschen Bewegung)

Für eine reflektierte Brownsche Bewegung  $(RBr(s, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  und  $t \in [0, \infty)$  gilt:

$$\begin{aligned} P(RBr(t) \leq y) &= 1 - \Phi\left(\frac{-y + s + \mu t}{\sigma t^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &\quad - \exp\left(\frac{2\mu y}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{-y - s - \mu t}{\sigma t^{\frac{1}{2}}}\right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

*Beweis:* Siehe [Aba87a]. □

Auch die Momentenfunktionen der ersten beiden Momente finden sich in diesen beiden Artikeln, allerdings nicht explizit, weshalb wir zunächst einige Vorergebnisse zitieren. Wir folgen dabei dem Vorgehen von Abate und Whitt.

**Theorem 3.2.** (Verteilung der Übergangszeit)

Mit  $a, b \in \mathbb{R}$  sei  $T_{ab} := \inf\{s \geq 0 \mid Br(a, -1, 1)(s) = b\}$  die Übergangszeit von  $a$  nach  $b$  für eine Brownsche Bewegung mit Drift  $-1$  und Diffusionskoeffizient  $1$ .

Dann hat  $T_{y0}$  die Verteilungsfunktion

$$L_y(t) := P(T_{y0} \leq t) = \Phi\left(\frac{t - y}{\sqrt{t}}\right) + e^{2y} \Phi\left(\frac{-t - y}{\sqrt{t}}\right), \quad (3.10)$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

*Beweis:* Siehe [Cox65]. □

Damit lassen sich nun die Momentenfunktionen wie folgt darstellen:

**Theorem 3.3.** (*Momente der reflektierten Brownschen Bewegung*)

Die ersten beiden Momentenfunktionen einer reflektierten Brownschen Bewegung  $(RBr(s, -1, 1)(t))_{t \in [0, \infty)}$  haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} m_1(t, s) &:= E(RBr(s, -1, 1)(t)) \\ &= \int_0^\infty e^{-2y} L_y(t) dy + \int_0^s 1 - L_y(t) dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} m_2(t, s) &:= E(RBr(s, -1, 1)(t)^2) \\ &= s^2 + t - 2 \int_0^t m_1(u, s) du. \end{aligned} \quad (3.12)$$

*Beweis:* Siehe Theoreme 7.1 und 7.2 in [Aba87b]. □

Mittels folgendem Lemma, zusammengestellt aus [Aba87a] Abschnitt 2, kann obiges Ergebnis dann auf allgemeine reflektierte Brownsche Bewegungen mit negativer Drift übertragen werden.

**Lemma 3.3.** (*Skalierung der Momente*)

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 0$ ,  $\mu < 0$ ,  $\sigma > 0$  und  $m_k(t, s) := E(RBr(s, -1, 1)^k(t))$ .

Dann ist

$$E\left(RBr(s, \mu, \sigma^2)^k(t)\right) = \left(\frac{\sigma^2}{-\mu}\right)^k m_k\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t, \frac{-\mu}{\sigma^2}s\right). \quad (3.13)$$

*Beweis:* Für  $s \geq 0$ ,  $\mu \neq 0$  und  $\sigma > 0$ :

$$\begin{aligned} Br(s, \mu, \sigma^2)(t) &\stackrel{d}{=} s + \mu t + \sigma W(t) \\ &\stackrel{d}{=} s + \mu t - \sigma W(t) \\ &\stackrel{d}{=} s + \mu t + \frac{\sigma^2}{-\mu} \frac{\mu}{\sigma} W(t) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{-\mu} \left( \frac{-\mu}{\sigma^2} s - \frac{\mu^2}{\sigma^2} t + W\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} t\right) \right) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{-\mu} Br\left(\frac{-\mu}{\sigma^2} s, -1, 1\right)\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} t\right). \end{aligned}$$

Falls zusätzlich  $\mu < 0$  ist, gilt weiter:

$$\begin{aligned}
RBr(s, \mu, \sigma^2)(t) &\stackrel{d}{=} \Phi(Br(s, \mu, \sigma^2))(t) \\
&\stackrel{d}{=} Br(s, \mu, \sigma^2)(t) + \sup_{q \in [0, t]} (Br(s, \mu, \sigma^2))^{-}(q) \\
&\stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{-\mu} Br\left(\frac{-\mu}{\sigma^2}s, -1, 1\right)\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right) + \sup_{q \in [0, t]} \left(\frac{\sigma^2}{-\mu} Br\left(\frac{-\mu}{\sigma^2}s, -1, 1\right)\right)^{-}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}q\right) \\
&\stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{-\mu} \left( Br\left(\frac{-\mu}{\sigma^2}s, -1, 1\right)\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right) + \sup_{q \in [0, \frac{\mu^2}{\sigma^2}t]} \left( Br\left(\frac{-\mu}{\sigma^2}s, -1, 1\right)\right)^{-}(q) \right) \\
&\stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{-\mu} \Phi\left( Br\left(\frac{-\mu}{\sigma^2}s, -1, 1\right)\right)\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right) \\
&\stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{-\mu} RBr\left(\frac{-\mu}{\sigma^2}s, -1, 1\right)\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right).
\end{aligned}$$

Daher ist schließlich

$$E\left(RBr(s, \mu, \sigma^2)(t)^k\right) = \left(\frac{\sigma^2}{-\mu}\right)^k E\left(RBr\left(\frac{-\mu}{\sigma^2}s, -1, 1\right)\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right)\right)^k.$$

□

Damit können wir die Momentenfunktionen allgemeiner reflektierter Brownscher Bewegung angeben. Allerdings müssen wir weiterhin negative Drift voraussetzen.

**Theorem 3.4.** (*Momente der reflektierten Brownschen Bewegung*)

Seien  $s \geq 0$ ,  $\mu < 0$  und  $\sigma > 0$ . Dann sind die ersten beiden Momente einer reflektierten Brownschen Bewegung:

$$E(RBr(s, \mu, \sigma^2)(t)) = \frac{\sigma^2}{-\mu} \left( \int_0^\infty e^{-2y} L_y\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right) dy + \int_0^{\frac{-\mu}{\sigma^2}s} 1 - L_y\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right) dy \right) \quad (3.14)$$

$$E(RBr(s, \mu, \sigma^2)(t)^2) = s^2 + \sigma^2 t - \frac{2\sigma^4}{\mu^2} \int_0^{\frac{\mu^2}{\sigma^2}t} \int_0^\infty e^{-2y} L_y(u) dy + \int_0^{\frac{-\mu}{\sigma^2}s} 1 - L_y(u) dy du, \quad (3.15)$$

wobei  $L_y$  die Verteilungsfunktion aus (3.10) ist.

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
E(RBr(s, \mu, \sigma^2)(t)) &\stackrel{\text{Lemma 3.3}}{=} \left(\frac{\sigma^2}{-\mu}\right) m_1\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t, \frac{-\mu}{\sigma^2}s\right) \\
&\stackrel{\text{Theorem 3.3}}{=} \frac{\sigma^2}{-\mu} \left( \int_0^\infty e^{-2y} L_y\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right) dy + \int_0^{\frac{-\mu}{\sigma^2}s} 1 - L_y\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}t\right) dy \right)
\end{aligned}$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned}
E(RBr(s, \mu, \sigma^2)(t)^2) &\stackrel{\text{Lemma 3.3}}{=} \left( \frac{\sigma^2}{-\mu} \right)^2 m_2 \left( \frac{\mu^2}{\sigma^2} t, \frac{-\mu}{\sigma^2} s \right) \\
&\stackrel{\text{Theorem 3.3}}{=} \frac{\sigma^4}{\mu^2} \left( \frac{\mu^2}{\sigma^4} s^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} t - 2 \int_0^{\frac{\mu^2}{\sigma^2} t} m_1(u, \frac{-\mu}{\sigma^2} s) du \right) \\
&= s^2 + \sigma^2 t - \frac{2\sigma^4}{\mu^2} \int_0^{\frac{\mu^2}{\sigma^2} t} \int_0^\infty e^{-2y} L_y(u) dy + \int_0^{\frac{-\mu}{\sigma^2} s} 1 - L_y(u) dy du
\end{aligned}$$

□

### 3.3 Integralgleichungen

Die Konstruktion der Diffusionsapproximation findet jeweils in zwei Stufen statt. Zunächst wird eine Approximation gebildet, die nicht berücksichtigt, daß ein Teil der Bedienkapazität durch Stillstand verloren geht. Im zweiten Schritt muß sie so angepaßt werden, daß sie diesen Verlust berücksichtigt.

Im Falle ohne Gruppenbedienung gelingt dies mit der in Lemma eingeführten Reflektionsabbildung. Sie läßt sich allerdings nicht direkt auf Warteschlangensysteme mit Gruppenbedienung übertragen, da bei diesen Systemen unterhalb der Bediengröße  $b$  nicht mehr mit maximaler Kapazität bedient wird, dieser Bereich des Zustandsraum aber sehr wohl angenommen wird. Daher möchte man die Drift des Approximationsprozesses entsprechend anpassen, wenn er sich unterhalb von  $b$  bewegt. Dafür werden wir das folgende Theorem in Kapitel 6 verwenden, um implizit eine Funktion auf  $D$  zu definieren, die eine Drift auf einem Teil des Zustandsraumes addiert. Der Beweis folgt einer Idee von Miller in [Mil71] auf Seite 25.

**Theorem 3.5.** *(Eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung)*

Sei  $f \in D$  und  $g \in C([0, \infty))$  beschränkt und Lipschitz-stetig. Dann gibt es genau ein  $x \in D$ , so daß gilt:

$$x(0) = f(0) \tag{3.16}$$

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(x(s)) ds \quad \forall t \geq 0. \tag{3.17}$$

Wenn  $f \in C([0, \infty))$  ist, gilt zusätzlich  $x \in C([0, \infty))$ .

*Beweis:* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge von Elementen aus  $D$  definiert durch:

$$x_0(t) := f(t) \tag{3.18}$$

$$x_{n+1}(t) := f(t) + \int_0^t g(x_n(s)) ds \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Für  $f \in C([0, \infty))$  liegt diese Folge in  $C([0, \infty))$ . Sei  $|g| \leq M$ , da  $g$  laut Voraussetzung beschränkt ist.

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  setzen wir  $y_n(t) := |x_{n+1}(t) - x_n(t)|$ . Für  $n = 0$  erhält man damit:

$$y_0(t) = |x_1(t) - x_0(t)| = |x_1(t) - f(t)| = \left| \int_0^t g(x_0(s)) ds \right| \leq Mt.$$

Dies verwenden wir als Induktionsanfang für eine Induktion über  $n$ .

Wir machen die Induktionsannahme

$$y_n(t) \leq \frac{ML^n t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (3.20)$$

wobei  $L \in [0, \infty)$  die Lipschitz-Konstante von  $g$  ist, und schließen von  $n$  auf  $n+1$ :

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= |x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| \\ &= \left| \int_0^t g(x_{n+1}(s)) - g(x_n(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |g(x_{n+1}(s)) - g(x_n(s))| ds \\ &\leq \int_0^t L |x_{n+1}(s) - x_n(s)| ds \\ &= \int_0^t L y_n(s) ds \\ &\stackrel{\text{Induktionsannahme}}{\leq} \int_0^t L \frac{ML^n s^{n+1}}{(n+1)!} ds \\ &= \frac{ML^{n+1} t^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

Damit haben wir (3.20) für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  bewiesen.

Um zu zeigen, daß  $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Cauchy-Folge ist, betrachten wir die Abschätzungen

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ML^i t^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{M}{L} (e^{Lt} - 1).$$

und

$$|x_{n+m}(t) - x_n(t)| \leq \sum_{i=n}^{m+n-1} y_i(t) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{ML^i t^{i+1}}{(i+1)!} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Da  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{ML^i t^{i+1}}{(i+1)!}$  konvergiert, geht  $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{ML^i t^{i+1}}{(i+1)!}$  und somit auch  $|x_{n+m}(t) - x_n(t)|$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Also ist  $(x_n(t))_n$  eine Cauchy-Folge. Außerdem sind diese Konvergenzen alle gleichmäßig auf  $[0, T]$ .

Wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  existiert der Grenzwert  $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Da zusätzlich die Konvergenz gleichmäßig auf  $[0, T]$  ist, gilt nach Lemma 2.1 zusätzlich  $x \in D$ . Wenn  $f \in C([0, \infty))$  ist, liegt die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch in  $C([0, \infty))$  und somit gilt sogar  $x \in C([0, \infty))$ .

Betrachtet man den Grenzwert von (3.19) für  $n \rightarrow \infty$ , so ergibt sich, daß  $x$  die Beziehungen (3.16) und (3.17) erfüllt.

Die Eindeutigkeit von  $x$  beweist man wie folgt:

Seien  $x, y \in D$  zwei Funktionen, die (3.16) und (3.17) erfüllen. Definiere  $z(t) := |x(t) - y(t)|$ . Dies impliziert:

$$z(t) \leq \int_0^t |g(x(s)) - g(y(s))| ds \leq L \int_0^t z(s) ds.$$

Also gilt:

$$0 \geq z(t) - L \int_0^t z(s) ds.$$

Und wegen  $e^{-Lt} > 0$  ist:

$$\begin{aligned} 0 &\geq e^{-Lt} \left( z(t) - L \int_0^t z(s) ds \right) \\ &= e^{-Lt} z(t) - L e^{-Lt} \int_0^t z(s) ds \\ &= \frac{d}{dt} e^{-Lt} \int_0^t z(s) ds. \end{aligned}$$

Integriert man beide Seiten von 0 bis  $T$ , folgt:

$$0 \geq [e^{-Lt} \int_0^t z(s) ds]_{t=0}^{t=T} = e^{-LT} \int_0^T z(s) ds.$$

Da  $z \in D$  und  $z \geq 0$  ist, folgt  $z = 0$  und somit die Eindeutigkeit. □

Nach Theorem 3.5 ist folgende Definition eindeutig:

**Definition 3.3.** (*Driftkorrekturabbildung*)

Für  $g \in C([0, \infty))$  beschränkt und Lipschitz-stetig bezeichnet  $I_g : D_0 \rightarrow D$  mit

$$I_g(x)(0) := x(0) \tag{3.21}$$

$$I_g(x)(t) := x(t) + \int_0^t g(I_g(x)(s)) ds \quad \forall t \geq 0 \tag{3.22}$$

die sogenannte *Driftkorrekturabbildung*.

Sie sorgt dafür, daß die Steigung von  $I_g(x)$  in  $t$  gleich  $x'(t) + g(I_g(x)(t))$  ist, falls die Ableitungen existieren. Sprungstellen von  $x$  bleiben erhalten, da die durch die Integration entstehende Stammfunktion stetig ist. Also wird wie erwünscht die Drift beziehungsweise die Steigung von  $x$  durch eine Addition von  $g(I_g(x))$  angepaßt.

Für diese Abbildung gilt:

**Theorem 3.6.** (*Lipschitz-Stetigkeit der Driftkorrekturabbildung*)

Sei  $g \in C([0, \infty))$  beschränkt und Lipschitz-stetig. Dann ist  $I_g : (D, \|\cdot\|_{[0,T]}) \rightarrow (D, \|\cdot\|_{[0,T]})$  für alle  $T \geq 0$  stetig.

*Beweis:*

Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in dem Beweis von Theorem 3.5. Seien  $f, f' \in D$  mit  $\|f - f'\|_{[0,T]} \leq \delta$ , sowie  $x := I_g(f)$  und  $x' := I_g(f')$ .

Also folgt:

$$\begin{aligned} x(0) &= f(0) \\ x(t) &= f(t) + \int_0^t g(x(s))ds \quad \forall t \geq 0 \\ x'(0) &= f'(0) \\ x'(t) &= f'(t) + \int_0^t g(x'(s))ds \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß mit  $\delta$  auch  $\|x - x'\|_{[0,T]}$  beliebig klein wird.

Es seien  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  und  $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  wieder die Folgen aus dem Beweis von Theorem 3.5, das heißt:

$$\begin{aligned} x_0 &= f \\ x_i(t) &= f(t) + \int_0^t g(x_{i-1}(s))ds \\ x'_0 &= f' \\ x'_i(t) &= f'(t) + \int_0^t g(x'_{i-1}(s))ds. \end{aligned}$$

Dem Beweis von Theorem 3.5 können wir entnehmen, daß  $x, x' \in D$  folgende Form haben:

$$x(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i(t) \tag{3.23}$$

$$x'(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} x'_i(t). \tag{3.24}$$

Sei  $y_n(t) := |x_n(t) - x'_n(t)|$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$y_0(t) \leq \|f - f'\|_{[0,T]} \leq \delta. \tag{3.25}$$

Dies verwenden wir als Induktionsanfang für eine Induktion über  $i$ . Als Induktionsannahme verwenden wir:

$$y_i(t) \leq \sum_{k=0}^i \delta \frac{L^k t^k}{k!}. \quad (3.26)$$

Der Induktionsschritt von  $i$  nach  $i+1$  lautet:

$$\begin{aligned} y_{i+1}(t) &= |x_{i+1}(t) - x'_{i+1}(t)| \\ &= |f(t) - f'(t) + \int_0^t g(x_i(s)) - g(x'_i(s)) ds| \\ &\leq |f(t) - f'(t)| + \int_0^t L \cdot |x_i(s) - x'_i(s)| ds \\ &\leq \delta + L \int_0^t y_i(s) ds \\ &\stackrel{\text{Induktionsannahme}}{\leq} \delta + L \int_0^t \sum_{k=0}^i \delta \frac{L^k s^k}{k!} ds \\ &= \delta + L \sum_{k=0}^i \delta \frac{L^k t^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \delta + \sum_{k=1}^{i+1} \delta \frac{L^k t^k}{(k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} \delta \frac{L^k t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Gleichung (3.26) ist dadurch  $\forall i \in \mathbb{N}_0$  bewiesen. Aufgrund der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x - x'\|_{[0,T]} &= \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} x_i - \lim_{i \rightarrow \infty} x'_i \right\|_{[0,T]} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - x'_i\|_{[0,T]} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|y_i\|_{[0,T]} \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^i \delta \frac{L^k t^k}{k!} \right\|_{t \in [0,T]} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i \delta \frac{L^k T^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta \frac{L^k T^k}{k!} \\ &= \delta e^{LT} \end{aligned}$$

folgt  $\|x - x'\|_{[0,T]} \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$ . □



### 3.4 Reflektierte Integralgleichungen

Zunächst werden wir mit der in Definition 3.3 eingeführten Abbildung eine Diffusionsapproximation für Warteschlangensysteme mit Gruppenbedienung konstruieren. Danach möchten wir diese verfeinern, indem wir den Approximationsprozeß zusätzlich zur Korrektur der Drift auch an der 0-Schranke reflektieren.

Dafür benötigen wir in Kapitel 6 eine Abbildung  $D \rightarrow D$ , welche eine Drift auf einem Teil des Zustandsraumes addiert und die Pfade an 0 reflektiert. Wir brauchen also eine Erweiterung des Theorems 3.5 um eine Reflektion, die wir in diesem Abschnitt darstellen möchten.

**Theorem 3.7.** *(Eindeutige Lösbarkeit der reflektierten Integralgleichung)*

Sei  $f \in D$  mit  $f(0) \geq 0$ . Weiterhin sei  $g \in C([0, \infty))$  beschränkt und Lipschitz-stetig. Dann gibt es genau ein  $x \in D$ , so daß gilt:

$$x(0) = f(0) \quad (3.27)$$

$$x(t) = \Phi\left(f(\cdot) + \int_0^\cdot g(x(s))ds\right)(t), \quad (3.28)$$

wobei  $\Phi$  die Reflektionsabbildung aus Definition 3.1 ist<sup>1</sup>.

*Beweis:* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge von Elementen aus  $D$  definiert durch:

$$x_0(t) := \Phi(f)(t) \quad (3.29)$$

$$\tilde{x}_{n+1}(t) := f(t) + \int_0^t g(x_n(s))ds \quad (3.30)$$

$$x_{n+1}(t) := \Phi(\tilde{x}_{n+1})(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.31)$$

Für  $f \in C([0, \infty))$  liegt diese Folge in  $C([0, \infty))$ . Sei  $|g| \leq M$ . Definiere  $y_n(t) := |x_{n+1}(t) - x_n(t)|$ . Dann gilt  $\forall T > 0$ :

$$\begin{aligned} \|y_0\|_{[0,T]} &= \|x_1 - x_0\|_{[0,T]} \\ &= \|\Phi(\tilde{x}_1) - \Phi(f)\|_{[0,T]} \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.2}}{\leq} 2\|\tilde{x}_1 - f\|_{[0,T]} \\ &= 2\left\|\int_0^\cdot g(x_0(s))ds\right\|_{[0,T]} \\ &\leq 2MT. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Weil  $f \in D_0$  und das Integral stetig sind, ist  $f(\cdot) + \int_0^\cdot g(x(s))ds \in D_0$ , so daß wir  $\Phi$  anwenden können. Analog gilt, falls  $f \in C([0, \infty))$  ist, auch  $x \in C([0, \infty))$ .

Dies dient uns als Induktionsanfang für eine Induktion über  $n$ . Als Induktionsannahme wählen wir

$$\|y_n\|_{[0,T]} \leq \frac{ML^n 2^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall T > 0, \quad (3.32)$$

wobei  $L \in [0, \infty)$  die Lipschitz-Konstante von  $g$  sei.

Der Schritt von  $n$  nach  $n+1$  ist:

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\|_{[0,T]} &= \|x_{n+2} - x_{n+1}\|_{[0,T]} \\ &= \|\Phi(\tilde{x}_{n+2}) - \Phi(\tilde{x}_{n+1})\|_{[0,T]} \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.2}}{\leq} 2\|\tilde{x}_{n+2} - \tilde{x}_{n+1}\|_{[0,T]} \\ &= 2\left\|\int_0^\cdot g(x_{n+1}(s)) - g(x_n(s)) ds\right\|_{[0,T]} \\ &\leq 2\left\|\int_0^\cdot |g(x_{n+1}(s)) - g(x_n(s))| ds\right\|_{[0,T]} \\ &= 2\int_0^T |g(x_{n+1}(s)) - g(x_n(s))| ds \\ &\leq 2\int_0^T L |x_{n+1}(s) - x_n(s)| ds \\ &\leq 2\int_0^T L \|x_{n+1} - x_n\|_{[0,s]} ds \\ &\stackrel{\text{Induktionsannahme}}{\leq} 2\int_0^T L \frac{ML^n 2^{n+1} s^{n+1}}{(n+1)!} ds \\ &= \frac{ML^{n+1} 2^{n+2} T^{n+2}}{(n+2)!} \quad \forall T > 0, \end{aligned}$$

womit die Behauptung (3.32) für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  bewiesen ist.

Die Ungleichung (3.32) impliziert

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|y_n\|_{[0,T]} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n 2^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{M}{L} (e^{2LT} - 1). \end{aligned}$$

Genauso folgt:

$$\begin{aligned} \|x_{i+j} - x_i\|_{[0,T]} &\leq \sum_{n=i}^{i+j-1} \|y_n\|_{[0,T]} \\ &\leq \sum_{n=i}^{\infty} \frac{ML^n 2^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ML^n 2^{n+1} T^{n+1}}{(n+1)!} < \infty$$

strebt  $\|x_{i+j} - x_i\|_{[0,T]}$  für  $i \rightarrow \infty$  gegen 0, so daß  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist.

Da  $\mathbb{R}$  vollständig ist, existiert für alle  $t \in [0, \infty)$  der Grenzwert  $x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ .

Weil die Konvergenz gleichmäßig auf  $[0, T]$  ist, liegt nach Lemma 2.1 die Funktion  $x$  in  $D$ . Für  $f \in C([0, \infty))$  ist mit der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch  $x$  in  $C([0, \infty))$ .

Indem wir von (3.30) und (3.31) den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  bilden, folgt (3.27) und (3.28) für  $x$ .

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von  $x$ . Seien dafür  $x, y \in D$  zwei Funktionen, die beide jeweils (3.27) und (3.28) erfüllen. Definiere  $z(t) := |x(t) - y(t)|$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \|x - y\|_{[0,t]} \\ &= \left\| \Phi\left(f(\cdot) + \int_0^\cdot g(x(s))ds\right) - \Phi\left(f(\cdot) + \int_0^\cdot g(y(s))ds\right) \right\|_{[0,t]} \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.2}}{\leq} 2 \left\| f(\cdot) + \int_0^\cdot g(x(s))ds - f(\cdot) - \int_0^\cdot g(y(s))ds \right\|_{[0,t]} \\ &= 2 \left\| \int_0^\cdot g(x(s)) - g(y(s))ds \right\|_{[0,t]} \\ &\leq 2 \left\| \int_0^\cdot |g(x(s)) - g(y(s))|ds \right\|_{[0,t]} \\ &\leq 2 \left\| \int_0^\cdot L|x(s) - y(s)|ds \right\|_{[0,t]} \\ &= 2L \left\| \int_0^\cdot z(s)ds \right\|_{[0,t]} \\ &= 2L \int_0^t z(s)ds. \end{aligned}$$

Äquivalent dazu ist:

$$0 \geq z(t) - 2L \int_0^t z(s)ds.$$

Hieraus folgt wegen  $e^{-2Lt} > 0$

$$\begin{aligned} 0 &\geq e^{-2Lt} \left( z(t) - 2L \int_0^t z(s) ds \right) \\ &= e^{-2Lt} z(t) - 2L e^{-2Lt} \int_0^t z(s) ds \\ &= \frac{d}{dt} e^{-2Lt} \int_0^t z(s) ds. \end{aligned}$$

und durch Integration von 0 bis  $T$  auch

$$0 \geq [e^{-2Lt} \int_0^t z(s) ds]_{t=0}^{t=T} = e^{-2LT} \int_0^T z(s) ds.$$

Da  $z \in D$  und  $z \geq 0$ , gilt  $z = 0$  und somit  $x = y$ . □

Nach Theorem 3.7 ist folgende Definition eindeutig:

**Definition 3.4.** (*Reflektions- und Driftkorrekturabbildung*)

Für  $g \in C([0, \infty))$ , beschränkt und Lipschitz-stetig bezeichnet  $R_g : D_0 \rightarrow D$  mit

$$R_g(x)(0) := x(0) \tag{3.33}$$

$$R_g(x)(t) := \Phi \left( x(\cdot) + \int_0^\cdot g(R_g(x)(s)) ds \right) (t) \quad \forall t \geq 0 \tag{3.34}$$

die sogenannte Reflektions- und Driftkorrekturabbildung, wobei  $\Phi$  die Reflektionsabbildung aus Definition 3.1 ist.

Weil  $x \in D_0$  und das Integral stetig sind, ist  $x(\cdot) + \int_0^\cdot g(R_g(x)(s)) ds \in D_0$ , so daß wir  $\Phi$  anwenden können. Deshalb gilt auch  $R_g(x) \in C([0, \infty))$ , falls  $x \in C([0, \infty))$  ist.

Falls die Ableitungen existieren, hat  $R_g(x)$  oberhalb von 0 die Steigung  $x' + g(R_g(x))$ . Genauso bleiben Sprünge von  $x$  erhalten, es sei denn, sie überschreiten die 0, an der ja eine Reflektion stattfindet, in welchem Fall der Sprung nur bis zur 0 reicht.

Diese Abbildung hat folgende Eigenschaft:

**Theorem 3.8.** (*Lipschitz-Stetigkeit*)

Sei  $g \in C([0, \infty))$  beschränkt und Lipschitz-stetig. Dann ist für jedes  $T \geq 0$  die Abbildung  $R_g : (D_0, \|\cdot\|_{[0,T]}) \rightarrow (D, \|\cdot\|_{[0,T]})$  stetig.

*Beweis:* In diesem Beweis verwenden wir die gleichen Bezeichnungen wie in dem Beweis von Theorem 3.7. Seien  $f, f' \in D$  mit  $\|f - f'\|_{[0,T]} \leq \delta$ . Darüber hinaus seien  $x := R_g(f)$  und  $x' := R_g(f')$ .

Also können wir zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
x(0) &= f(0) \\
x(t) &= \Phi \left( f(\cdot) + \int_0^t g(x(s)) ds \right) (t) \quad \forall t \geq 0 \\
x'(0) &= f'(0) \\
x'(t) &= \Phi \left( f'(\cdot) + \int_0^t g(x'(s)) ds \right) (t) \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Es ist nun zu zeigen, daß mit  $\delta$  auch  $\|x - x'\|_{[0,T]}$  beliebig klein wird.

Nun seien  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(\tilde{x}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\tilde{x}'_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  Folgen in  $D$ , definiert wie die gleichnamigen Folgen in dem Beweis von Theorem 3.7, das heißt:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &:= \Phi(f)(t) \\
\tilde{x}_i(t) &:= f(t) + \int_0^t g(x_{i-1}(s)) ds \\
x_i(t) &:= \Phi(\tilde{x}_i)(t) \\
x'_0(t) &:= \Phi(f')(t) \\
\tilde{x}'_i(t) &:= f'(t) + \int_0^t g(x'_{i-1}(s)) ds \\
x'_i(t) &:= \Phi(\tilde{x}'_i)(t).
\end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Theorem 3.7 wissen wir:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{i \rightarrow \infty} x_i(t) \\
x'(t) &= \lim_{i \rightarrow \infty} x'_i(t).
\end{aligned}$$

Sei wiederum  $y_n(t) := |x_n(t) - x'_n(t)|$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ . Nun gilt  $\forall t \in [0, T]$ :

$$\|y_0\|_{[0,t]} = \|\Phi(f) - \Phi(f')\|_{[0,t]} \stackrel{\text{Lemma 3.2}}{\leq} 2\|f - f'\|_{[0,t]} \leq 2\|f - f'\|_{[0,T]} \leq 2\delta.$$

Dies dient uns als Anfang für die folgende Induktion über  $i$ . Man beachte, daß  $\delta$  von  $T$  abhängig ist, und somit beide bereits fest gewählt sind. Wir beweisen also die nächste Aussage auf einem festen Intervall, um  $T$  konstant zu halten. Für die Induktion dafür nehmen wir an:

$$\|y_i\|_{[0,t]} \leq \sum_{k=0}^i \delta \frac{2^{k+1} L^k t^k}{k!} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.35)$$

Zum Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\|y_{i+1}\|_{[0,t]} &= \|x_{i+1} - x'_{i+1}\|_{[0,t]} \\
&= \|\Phi(\tilde{x}_{i+1}) - \Phi(\tilde{x}'_{i+1})\|_{[0,t]} \\
&\stackrel{\text{Lemma 3.2}}{\leq} 2\|\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}'_{i+1}\|_{[0,t]} \\
&= 2\|f(\cdot) - f'(\cdot) + \int_0^\cdot g(x_i(s)) - g(x'_i(s))ds\|_{[0,t]} \\
&\leq 2\|f - f'\|_{[0,t]} + 2\left\|\int_0^\cdot g(x_i(s)) - g(x'_i(s))ds\right\|_{[0,t]} \\
&\leq 2\|f - f'\|_{[0,T]} + 2\left\|\int_0^\cdot |g(x_i(s)) - g(x'_i(s))|ds\right\|_{[0,t]} \\
&\leq 2\delta + 2\left\|\int_0^\cdot L|x_i(s) - x'_i(s)|ds\right\|_{[0,t]} \\
&= 2\delta + 2\int_0^t L|x_i(s) - x'_i(s)|ds \\
&\leq 2\delta + 2\int_0^t L\|x_i - x'_i\|_{[0,s]}ds \\
&\stackrel{\text{Nach Induktionsannahme}}{\leq} 2\delta + 2L\int_0^t \sum_{k=0}^i \delta \frac{2^{k+1}L^k s^k}{k!} ds \\
&= 2\delta + 2L\sum_{k=0}^i \delta \frac{2^{k+1}L^k t^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= 2\delta + \sum_{k=1}^{i+1} \delta \frac{2^{k+1}L^k t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{i+1} \delta \frac{2^{k+1}L^k t^k}{k!} \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Also gilt (3.35) für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

Letztendlich folgt

$$\begin{aligned}
\|x - x'\|_{[0,T]} &= \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} x_i - \lim_{i \rightarrow \infty} x'_i \right\|_{[0,T]} \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - x'_i\|_{[0,T]} \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \|y_i\|_{[0,T]} \\
&\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i 2\delta \frac{2^k L^k T^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2\delta \frac{2^k L^k T^k}{k!} \\
&= 2\delta e^{2LT},
\end{aligned}$$

was für  $\delta \rightarrow 0$  gegen 0 geht. □

### 3.5 Reflektierte stochastische Differentialgleichungen

Für eine verfeinerte Diffusionsapproximation mit Reflektion der Pfade an der 0-Schranke benötigen wir in Kapitel 6 das Konzept stochastischer Differentialgleichungen mit Reflektion. Es kombiniert stochastische Differentialgleichungen mit der in Abschnitt 3.1 definierten Reflektion.

**Definition 3.5.** (*Reflektierte stochastische Differentialgleichung*)

Man nennt einen reellwertigen stochastischen Prozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  eine Lösung der an  $r \in \mathbb{R}$  **reflektierten stochastischen Differentialgleichung** (SDER)

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t) + f(t) \quad (3.36)$$

genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(0) + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s) + \hat{f}(t) \\
\hat{f}(t) &= \Psi\left(X(0) + \int_0^\cdot \mu(X(s))ds + \int_0^\cdot \sigma(X(s))dW(s) - r\right)(t) \\
X(0) &\geq r,
\end{aligned}$$

wobei  $\Psi : D_0 \rightarrow D$  der in Definition 3.1 eingeführte Regulator ist. Man nennt  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  dann einen **reflektierten Diffusionsprozeß**.

Für  $0 = r \leq X(0)$  ist dies äquivalent zu

$$X(t) = \Phi\left(X(0) + \int_0^\cdot \mu(X(s))ds + \int_0^\cdot \sigma(X(s))dW(s)\right)(t). \quad (3.37)$$

Weil die Pfade des Itô-Integrals fast sicher stetig sind, ist auch

$$X(0) + \int_0^\cdot \mu(X(s))ds + \int_0^\cdot \sigma(X(s))dW(s) - r$$

fast sicher stetig. Deshalb können wir  $\Psi$  beziehungsweise  $\Phi$  auf diese Funktion anwenden, wenn wir sie auf der  $P$ -Nullmenge beliebig definieren. Die Pfade des so definierten reflektierten Diffusionsprozesses sind so ebenfalls fast sicher stetig.

Reflektierte stochastische Differentialgleichung wird häufig abgekürzt mit SDER, abgeleitet von dem englischen Begriff “stochastic differential equation with reflection”. Allerdings findet man in der englischsprachigen Literatur ebenfalls die Bezeichnung “reflected stochastic differential equation”.

Diese Definition kann mit der allgemeineren Definition für beliebige Dimensionen in [Kus92] auf Seite 24 verglichen werden.

Man kann sich diesen Prozeß vorstellen als einen, der sich lokal am Punkt  $x > r$  verhält wie eine Brownsche Bewegung mit Drift  $\mu(x)$  und Diffusionskoeffizient  $\sigma(x)$ , aber an der Schranke  $x = r$  reflektiert wird. Es stellt sich zunächst die Frage, unter welchen Bedingungen ein solcher Prozeß existiert. Im Hinblick auf die Aufgabenstellung dieser Arbeit ergibt sich damit jedoch kein Problem, da es in diesen Fällen immer eine eindeutige Lösung gibt:

**Theorem 3.9.** *(Eindeutige Lösbarkeit)*

Wenn  $\mu(x)$  und  $\sigma(x) \geq 0$  Lipschitz-stetig und beschränkt sind und  $x(0)$  sowie  $r \in \mathbb{R}$  gegeben sind, dann gibt es einen fast sicher eindeutigen stochastischen Prozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ , der (3.36) erfüllt.

*Beweis:* Siehe [Ma99], Theorem 7.1.2 auf Seite 171. □

Dieser reflektierte Diffusionsprozeß hat auch fast sicher stetige Pfade, was aus der Stetigkeit der Pfade des Itô-Integrals folgt.

Lokal verhält sich der reflektierte Diffusionsprozeß oberhalb von der reflektierenden Schranke  $r$  wie eine normale Diffusion.

**Theorem 3.10.** *(Charakterisierung der Koeffizienten)*

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein reflektierter Diffusionsprozeß mit (3.36). Dann gilt für alle  $t, s, \epsilon \geq 0$  bei  $t \rightarrow 0+$  und  $x > r$ :

$$E((X(s+t) - X(s)) \mathbf{1}_{\{|X(s+t) - X(s)| \leq \epsilon\}} | X(s) = x) = t\mu(x) + o(t) \quad (3.38)$$

$$E((X(s+t) - X(s))^2 \mathbf{1}_{\{|X(s+t) - X(s)| \leq \epsilon\}} | X(s) = x) = t\sigma^2(x) + o(t) \quad (3.39)$$

$$P(|X(s+t) - X(s)| > \epsilon | X(s) = x) = o(t). \quad (3.40)$$

Außerdem gilt auch hier die Fokker-Planck-Gleichung oberhalb der reflektierenden Schranke mit einer entsprechenden Randbedingung an der reflektierenden Schranke.



**Theorem 3.11.** (*Fokker-Planck Gleichung mit Nebenbedingung*)

Sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein reflektierter Diffusionsprozeß mit (3.36) und transienter Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(t, x)$ .

Dann gilt für  $t \geq 0$  die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} \mu(t, x) p(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \quad \text{für } x > r \quad (3.41)$$

und als Nebenbedingung

$$\mu(t, x) p(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma(t, x)^2}{2} p(t, x) \quad \text{für } x = r. \quad (3.42)$$

Ausführlichere Ergebnisse über reflektierte Diffusionsprozesse findet man zum Beispiel bei [Bha90].



## 4 Diffusionsapproximation von Warteschlangensystemen

### 4.1 Warteschlangen mit allgemein verteilten Zwischenankunfts- und Bedienzeiten

Das G/G/1-Warteschlangensystem wird schon seit langer Zeit erforscht. Obwohl das Modell vergleichsweise einfach ist, führt seine Untersuchung zu komplexen Problemen. Diese entstehen dadurch, daß über die Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten keine speziellen Voraussetzungen getroffen werden. Diese hohe Allgemeinheit hat natürlich ihren Preis. Es ist weder eine geschlossene analytische Formel für die transiente, noch für die stationäre Verteilung der Warteschlange bekannt. Klassische Bücher mit Ergebnissen über diese Warteschlange sind die von Gross/Harris [Gro74] und Kleinrock [Kle76]. Ein Neues ist das von Robert [Rob03].

Traditionell wird das G/G/1-Warteschlangensystem mit Hilfe einer rekursiven Relation zwischen der Wartezeit  $W_n$  des  $n$ -ten Kunden und der Wartezeit  $W_{n-1}$  des  $(n-1)$ -Kunden analysiert. Dieser Ansatz geht auf Lindley zurück (siehe [Lin52]). Die Auswertung der Rekursionsbeziehung führt zu Kingmans Algebra der Warteschlangen, [Kin66]. Durch die Wiener-Hopf-Faktorisierung kann die Laplace-Transformierte der stationären Wartezeit ermittelt werden. Dieses Vorgehen ist allerdings nicht besonders gut für konkrete Anwendungen geeignet.

Wegen der Schwierigkeit diese Warteschlange exakt zu lösen wurden verschiedene Approximationsmethoden entwickelt. Die wichtigsten sind die Fluidapproximation und die Diffusionsapproximation.

Die grundsätzliche Idee der Fluidapproximation ist, den stochastischen Prozeß der Warteschlangenlänge auf einen deterministischen Prozeß zu reduzieren, als ob - anschaulich betrachtet - eine Flüssigkeit mit der vorgegebenen Ankunftsrate in das System hinein und mit der vorgegebenen Bedienrate abfließen würde. Gewissermaßen wird auf diese Weise die stochastische Qualität des Problems vernachlässigt. In dem Buch von Chen und Yao [Che01] wird gezeigt, daß dieser deterministische Prozeß der Grenzwert einer entsprechend normierten Folge von Warteschlangenprozessen ist. Diese Konvergenz beruht auf einer Verallgemeinerung des starken Gesetzes der großen Zahlen. Bei diesem Vorgehen wird die Verteilung der Warteschlangenlänge auf ihr erstes Moment reduziert, weshalb dann nur noch Vorhersagen über ihren Erwartungswert möglich sind.

Im Gegensatz dazu basiert Diffusionsapproximation auf einer Anpassung des zentralen Grenzwertsatzes an Summations- und Zählprozesse, die sich zum Beispiel bei [Kar91] auf Seite 70 findet. Bei dieser Approximation ist der Grenzwert von einer entsprechend normierten Folge von Warteschlangenprozessen eine Brownsche Bewegung. Das heißt, in gewisser Weise wird die Verteilung der Warteschlangenlänge durch eine geeignete Skalierung und eine passende Grenzbetrachtung auf ihre ersten zwei Momente reduziert. Die Idee zu einer derartigen Approximation gibt es schon lange, siehe zum Beispiel [Fel66] oder [Cox65].

Der am weitesten verbreitete Ansatz dieses Approximationsverfahrens verwendet die Fokker-Planck-Gleichung, um die transiente oder stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte des Warteschlangenprozesses zu bestimmen. Er geht auf [Gav68] zurück, der ihn zunächst für die Approximation der M/G/1-Warteschlange, eine Warteschlange mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten, entwickelte. Zum Beispiel Gelenbe [Gel75], Duda [Dud83], [Dud86] und Mitzlaff [Mit97] führen diesen Ansatz für G/G/1-Warteschlangen weiter.

Auf Iglehart und Whitt geht ein anderer Ansatz zurück: Er basiert darauf, Warteschlangen mit Hilfe funktionaler Grenzwertsätze zu approximieren. Siehe dafür zum Beispiel [Igl70a] und [Igl70b]. Dabei wird die Konvergenz von stochastischen Prozessen statt von einzelnen Zufallsvariablen betrachtet. Werden das funktionale Gesetz der großen Zahlen oder der funktionale zentrale Grenzwertsatz verwendet, entsprechen die Grenzprozesse der Fluidapproximation beziehungsweise der Diffusionsapproximation. Modernere Darstellungen dieses Vorgehens findet man in Whitt [Whi02] und bei Chen und Yao [Che01].

Allen und Cunneen haben ohne Beweis durch empirische Analysen eine Approximationsformel für den Erwartungswert der stationären Warteschlangenlänge gefunden. Vergleiche [All90] auf Seite 341.

Bei der Untersuchung von Warteschlangensystemen mit Gruppenbedienung müssen zusätzliche Effekte berücksichtigt werden. Der rekursive Zusammenhang zwischen den Wartezeiten läßt sich nicht direkt übertragen. Allerdings ist die Anpassung der Fluidapproximation auf den Fall der Gruppenbedienung relativ naheliegend.

Chiamsiri und Leonhard [Chi81] haben einige Ergebnisse für den stationären Zustand von Warteschlangen mit Gruppenbedienung entwickelt. Sie beruhen auf der Diffusionsapproximation mittels der Fokker-Planck-Gleichung. Zisgen [Zis99] verfeinert diesen Ansatz, indem er eine neue Modellierung des Randverhaltens, im Wesentlichen eine Verschiebung des Randes, einführt.

Wir wollen nun die traditionelle Konstruktion der Diffusionsapproximation mittels der Fokker-Planck-Gleichung skizzieren, damit die Einordnung und die Zusammenhänge der vorliegenden Arbeit deutlich werden. Für eine ausführlichere Behandlung des Ansatzes über die Fokker-Planck-Gleichung sollte man die genannten Arbeiten zu Rate ziehen.

## 4.2 Diffusionsapproximation von G/G/1 mit der Fokker-Planck-Gleichung

Wir beginnen mit einer Untersuchung der G/G/1-Warteschlange. Das Modell beruht auf folgenden Annahmen: Zunächst seien die Zeiten zwischen dem Eintreffen aufeinander folgender Kunden stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Man betrachtet eine Folge  $(u_i)_{i=1,2,\dots}$  von stochastisch unabhängigen, identisch verteilten und nicht-negativen Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $0 < \frac{1}{\lambda} < \infty$  und Varianz  $0 < \sigma_a^2 < \infty$ , wobei  $u_i$  die Zeit zwischen der Ankunft des  $i-1$ -ten und des  $i$ -ten Kunden angibt. Diese wird **Zwischenankunftszeit** genannt.

Genauso nimmt man an, daß die **Bedienzeiten** der aufeinander folgenden Kunden eine Folge  $(v_i)_{i=1,2,\dots}$  von stochastisch unabhängigen, identisch verteilten und nicht-negativen Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $0 < \frac{1}{\nu} < \infty$  und Varianz  $0 < \sigma_s^2 < \infty$  bilden.

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $t \geq 0$  seien:

$$U(n) := \sum_{i=1}^n u_i \quad (4.1)$$

$$V(n) := \sum_{i=1}^n v_i \quad (4.2)$$

$$A(t) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid U(n) \leq t\} \quad (4.3)$$

$$S(t) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid V(n) \leq t\}. \quad (4.4)$$

Daher entspricht der Prozeß  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$  der Anzahl der bis zum Zeitpunkt  $t$  angekommenen Kunden, während der Prozeß  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Anzahl der bis zur akkumulierten Bedienzeit  $t$  bedienten Kunden angibt. Beides sind nach Definition 2.11 Zählprozesse. Mit  $\rho := \lambda/\nu$  bezeichnen wir die **Auslastung** des Systems und mit dem **Warteschlangenprozeß**  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Anzahl der Kunden im System zum Zeitpunkt  $t$ .

Für  $\rho \rightarrow 1$  ist die akkumulierte Bedienzeit  $B(t)$  gleich  $t$ , da der Bediener zu jedem Zeitpunkt fast sicher beschäftigt ist. Deshalb wird bei diesem Ansatz Folgendes angenommen:

$$Q(t) = Q(0) + A(t) - S(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.5)$$

### Theorem 4.1.

Sei  $\rho \rightarrow 1$ . Dann gilt:

$$Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(Q(0), \lambda - \nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2)(t). \quad (4.6)$$

*Beweis:*  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$  sind Zählprozesse, so daß mit (2.36) gilt:

$$\begin{aligned} A(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \lambda, \lambda^3 \sigma_a^2)(t) \\ S(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \nu, \nu^3 \sigma_s^2)(t). \end{aligned}$$

Da in diesem Fall zu jedem Zeitpunkt  $t$  fast sicher (mindestens) ein Kunde im System ist, kann man annehmen, daß  $A(t)$  und  $S(t)$  voneinander stochastisch unabhängig sind.

Mit (4.5) folgt die Behauptung.  $\square$

Bei der Anwendung dieser Approximation fällt auf, daß die Brownsche Bewegung auch negative Werte annehmen kann, und darüber hinaus bei einer Auslastung kleiner 1 fast sicher gegen  $-\infty$  geht. Deshalb ist dieser Prozeß für eine wirkliche Approximation in der Praxis nutzlos. Es bleibt also die Frage offen, wie man den Prozeß in die positive Halbebene transformiert. Wir werden dies später klären.

Um die transiente Wahrscheinlichkeitsverteilung zu bestimmen, benutzt man die Charakterisierung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte der Brownschen Bewegung mittels der Fokker-Planck-Gleichung (wie in Theorem 2.1 dargestellt):

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y, s) = -\frac{\partial}{\partial x} \mu p(x, t, y, s) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s). \quad (4.7)$$

Die Koeffizienten entnimmt man aus Theorem 4.1:

$$\mu = \lambda - \nu \quad (4.8)$$

$$\sigma^2 = \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2. \quad (4.9)$$

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Approximation der Warteschlangenlänge wird nun aus der Fokker-Planck-Gleichung konstruiert, indem die Randbedingung der **reflektierende Schranke** hinzugefügt wird, die  $Q(t) \geq 0$  für alle  $t \geq 0$  sicherstellt.

$$1 = \int_0^\infty p(x, t, y, s) dx \quad \forall t \geq 0.$$

Mittels Differentiation folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty p(x, t, y, s) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y, s) dx. \end{aligned}$$

Setzt man diese Bedingung in die Fokker-Planck-Gleichung (4.7) ein, ergibt sich:

$$0 = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial x} \mu p(x, t, y, s) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s) dx.$$

Und daraus:

$$0 = \left[ -\mu p(x, t, y, s) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s) \right]_{x=0}^{x=\infty} = \left( \mu p(x, t, y, s) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s) \right) \Big|_{x=0}.$$

Daher sieht die aus der reflektierenden Schranke resultierende Randbedingung folgendermaßen aus:

$$\mu p(x, t, y, s) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s) \quad \text{für } x = 0 \text{ und } \forall t \geq 0.$$

Damit wird das Problem auf folgende Differentialgleichungen und Randbedingungen zurückgeführt:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y, s) = -\frac{\partial}{\partial x} \mu p(x, t, y, s) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s) \quad (4.10)$$

$$\mu p(x, t, y, s) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t, y, s) \quad \text{für } x = 0 \text{ und } t \geq s \geq 0 \quad (4.11)$$

$$\int_0^\infty p(x, t, y, s) dx = 1 \quad \text{für } t \geq s \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow s} p(x, t, y, s) = \delta(x - y) \quad \text{für } x \geq 0 \text{ und } t \geq s \geq 0, \quad (4.13)$$

wobei  $\delta$  die Diracsche  $\delta$ -Verteilung ist.

Auf diese Weise werden fast sicher keine negativen Werte angenommen, aber es ist nicht sichtbar, wie ein Pfad des approximierenden Prozesses und damit die stochastische Interpretation der resultierenden Verteilung aussieht.

**Theorem 4.2.** (*Bestimmung der Verteilung*)

Es sei  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein Markovprozeß mit Übergangsdichte  $p(x, t, y, s)$ . Erfüllt  $p(x, t, y, s)$  (4.10) bis (4.13), so gilt:

$$\begin{aligned} P(X(t) \leq x | X(s) = y) &= 1 - \Phi \left( \frac{-x + y + s + \mu t}{\sigma t^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\quad - \exp \left( \frac{2\mu(x - y)}{\sigma^2} \right) \Phi \left( \frac{-x + y - s - \mu t}{\sigma t^{\frac{1}{2}}} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei  $\Phi$  die Standardnormalverteilung ist.

*Beweis:* Siehe Abschnitt 3.1.1 in [Mit97]. □

Für  $s = 0$  ist (4.14) nach Theorem 3.1 genau die Verteilungsfunktion einer reflektierten Brownschen Bewegung  $(RBr(y, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$ . Deshalb führt der auf der Fokker-Planck-Gleichung beruhende Ansatz tatsächlich zu der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung wie die Approximation von  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch die reflektierte Brownsche Bewegung  $(RBr(Q(0), \lambda - \nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$ .

Die Diskretisierung der stationären Verteilung kann auf unterschiedliche Weise vorgenommen werden.

### 4.2.1 Diskretisierung

Für den Fall eines Approximationsprozesses  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  mit kontinuierlicher Verteilung wurden bereits einige Diskretisierungen untersucht. Folgende Approximationen wurden für  $P(Q(t) = n)$  vorgeschlagen:

$$\begin{array}{ll} P(Y(t) \in [n, n+1)) & \text{nach Kobayashi in [Kob74a],} \\ P(Y(t) \in (n-1, n]) & \text{nach Gelenbe in [Gel75],} \\ P(Y(t) \in [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})) & \text{nach Halachmi und Franta in [Hal78].} \end{array}$$

Die beiden ersten Ansätze verwenden dabei als Schätzer die Wahrscheinlichkeit eines Intervalls, das nur an  $n$  angrenzt, was eine gewisse Verzerrung darstellt. Mitzlaff zum Beispiel bestimmt diese Wahrscheinlichkeiten in [Mit97] explizit und erhält dann aber bei beiden Methoden

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{Q(0)}(t) = \frac{1}{2}.$$

Er gleicht dies aus, indem er noch einige Koeffizienten des Ausdrucks für  $p_n(t)$  entsprechend anpaßt. Solch eine Anpassung setzt allerdings einen explizit bekannten Term voraus und läßt sich folglich nicht auf einen numerischen Lösungsweg übertragen.

Der Vorschlag von Halachmi und Franta vermeidet die oben beschriebene Verzerrung, unterschätzt aber  $P(Q(t) = 0)$ , weil dieser Zustand als einziger dann nur einem Intervall der Länge  $\frac{1}{2}$  entspricht, da negative Werte ja nicht angenommen werden.

Numerische Ergebnisse entwickelt Mitzlaff dann für die sehr niedrige Auslastung  $\rho = 0,5$ . Dabei stellt sich die Diskretisierung von Kobayashi als am besten geeignet heraus. Aber auch sie liefert für diese niedrige Auslastung in einigen Beispielen recht schlechte Ergebnisse.

### 4.2.2 Absorbierende Schranke mit sofortiger Rückkehr

Alternativ zu der Randbedingung der reflektierenden Schranke wird mit der absorbierenden Schranke mit sofortiger Rückkehr, auch bekannt als Prozeß der elementaren Rückkehr, gearbeitet. Die anschauliche Idee dabei ist, daß der Prozeß, wenn er die Schranke  $Q(t) = 0$  erreicht, für eine exponentialverteilte Zeitdauer gestoppt wird, und dann ohne Zeitverzögerung in den Zustand  $x = 1$  zurückspringt. Sie geht auf Gelenbe [Gel75] zurück. Duda gelang die transiente Lösung dieses Problems, vgl. [Dud83] und [Dud86]. Die Skizzierung hier folgt Mitzlaff [Mit97].

Für die Approximation wird die Verteilungsfunktion durch eine modifizierte Fokker-Planck-Gleichung mit ebenso modifizierten Randbedingungen bestimmt. Die modifizierte Fokker-Planck-Gleichung hat die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mu p(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t) = \Lambda R(t) \delta(x - 1), \quad (4.15)$$



wobei  $\Lambda$  die durchschnittliche Verweildauer an der Schranke,  $R(t)$  die Wahrscheinlichkeit, daß die Schranke zum Zeitpunkt  $t$  erreicht wird, und  $\delta$  die Diracsche  $\delta$ -Verteilung angeben. Die Koeffizienten  $\mu$  und  $\sigma$  werden auf die gleiche Weise wie oben beschrieben hergeleitet.

Die Rand- und Nebenbedingungen sind

$$\frac{dR(t)}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t) - \mu p(x, t) \right) \Big|_{x=0} - \Lambda R(t) \quad (4.16)$$

$$p(0, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (4.17)$$

$$\int_{0+}^{\infty} p(x, t) dx + R(t) = 1. \quad (4.18)$$

Allerdings findet Mitzlaff für dieses System nur die Laplace-Transformierte der Übergangsdichte. Sie wird dann mit einem numerischen Verfahren von Stehfest [Ste70] invertiert.

Als beste Diskretisierung stellt sich  $P(Q(t) = n) = p(n, t)$  für  $n \geq 1$  heraus. Aus der Normierungsbedingung ergibt sich dann  $P(Q(t) = 0)$ .

### 4.3 Diffusionsapproximation von G/G/1(b,b) mit der Fokker-Planck-Gleichung

Auch von Zisgen [Zis99] wurde mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung eine Diffusionsapproximation für Bediensysteme mit Gruppenbedienung entwickelt.

Ausgangspunkt ist hier die Feststellung, daß für  $Q(t) \leq b$  eine positive Drift auftritt, im Gegensatz zu  $Q(t) > b$ , wo die Drift negativ ist. Die Idee ist hier nun, diesen Bereich durch die Wahl einer entsprechenden Randbedingung der Fokker-Planck-Gleichung abzuschneiden und das Verhalten von  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  für  $Q(t) > b$  wie bisher zu modellieren.

Zunächst wird die Warteschlange genauso wie zuvor bei der auf der Fokker-Planck-Gleichung basierenden Diffusionsapproximation modelliert, nur daß in diesem Fall jeweils  $b$  Kunden auf einmal bedient werden. Wir verwenden auch die gleichen Bezeichnungen wie in (4.5). Dies führt zu:

$$Q(t) = Q(0) + A(t) - bS(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.19)$$

Entsprechend verändern sich auch die Koeffizienten der approximierenden Brownschen Bewegung, wie wir in folgendem Theorem sehen:

#### Theorem 4.3.

Sei  $\rho \rightarrow 1$ . Dann gilt:

$$Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 b^2 \sigma_s^2). \quad (4.20)$$

*Beweis:* Die Prozesse  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$  sind Zählprozesse und deshalb gilt mit (2.36):

$$\begin{aligned} A(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \lambda, \lambda^3 \sigma_a^2) \\ S(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \nu, \nu^3 \sigma_s^2). \end{aligned}$$

Wegen der Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung, kann man das  $b$  in die Koeffizienten ziehen:

$$b \cdot Br(0, \nu, \nu^3 \sigma_s^2) \stackrel{d}{=} Br(0, b\nu, \nu^3 b^2 \sigma_s^2).$$

Da für  $\rho \rightarrow 1$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  fast sicher (mindestens) ein Kunde im System ist, kann man annehmen, daß  $A(t)$  und  $S(t)$  voneinander stochastisch unabhängig sind.

Mit (4.19) folgt die Behauptung.  $\square$

Also haben die Koeffizienten folgende Gestalt:

$$\mu = \lambda - b\nu \quad (4.21)$$

$$\sigma^2 = \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 b^2 \sigma_s^2. \quad (4.22)$$

Der wesentliche Schritt ist jedoch die Modellierung der Randbedingung.

Bei Zisgens Ansatz wird im Zustand  $b - 1$  eine absorbierende Schranke mit sofortiger Rückkehr nach  $b$  angenommen, wobei die Verweildauer in  $b - 1$  der durchschnittlichen Dauer der Vervollständigung einer Bediengruppe entsprechen soll. Dieser Zustand faßt also alle Zustände zusammen, in denen die Warteschlange kürzer als  $b$  ist.

Zusammengefaßt sieht das modifizierte Fokker-Planck-Gleichungs-System dann so aus:

$$\Lambda R(t) \delta(x - b) = \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mu p(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t) \quad (4.23)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma^2}{2} p(x, t) - \mu p(x, t) \right]_{x=b-1} - \Lambda R(t) \quad (4.24)$$

$$p(b - 1, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (4.25)$$

$$\int_{(b-1)^+}^{\infty} p(x, t) dx + R(t) = 1, \quad (4.26)$$

wobei  $R(t)$  die Wahrscheinlichkeit des Erreichens der  $b - 1$  Schranke,  $\Lambda$  die durchschnittliche Verweildauer dort und  $\delta$  die Diracsche  $\delta$ -Verteilung ist.

Zisgen (siehe [Zis99], Seite 88) löst dieses System für den Fall der Grenzverteilung und kommt dabei zu folgendem Ergebnis:

$$p(x) = 0, \quad \text{für } x < b - 1 \quad (4.27)$$

$$p(x) = \frac{\Lambda R}{\mu} \left( \exp \left( -\frac{2\mu}{\sigma^2} (b - 1) \right) \exp \left( \frac{2\mu}{\sigma^2} x \right) - 1 \right) \quad \text{für } b - 1 \leq x \leq b \quad (4.28)$$

$$p(x) = \frac{\Lambda R}{\mu} \left( \exp \left( -\frac{2\mu}{\sigma^2} (b - 1) \right) - \exp \left( \frac{2\mu}{\sigma^2} x \right) \right) \exp \left( \frac{2\mu}{\sigma^2} x \right) \quad \text{für } b < x. \quad (4.29)$$

Mit der Normierungsbedingung (4.26) wird dann  $R$  bestimmt:

$$R = \left( \frac{2\Lambda}{2\mu} \left( \frac{\sigma^2}{2\mu} \exp\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}(b-1)\right) - \frac{\sigma^2}{2\mu} - 1 \right) + 1 \right)^{-1}. \quad (4.30)$$

Damit ist nun eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt, mit der man die Warteschlangenlänge für G/G/1(b,b) approximieren kann, allerdings unter der Bedingung  $Q \geq b$ . Für die Diskretisierung wählt man auch Kobayashis Ansatz und bestimmt für  $n \geq b$  also  $p_n := \int_n^{n+1} p(x)dx$  als Approximation für  $P(Q = n | Q \geq b)$ . Daraus wird  $E(Q = n | Q \geq b)$  berechnet. Mit  $P(Q \geq b) = \rho = \frac{\lambda}{b\mu}$  führt dies weiter zu einer Approximation von  $E(Q)$ .

Offen bleibt allerdings die Frage nach der Verteilung unterhalb von  $b$ .



## 5 Approximation der G/G/1-Warteschlange

In diesem Kapitel entwickeln wir zunächst eine Diffusionsapproximation der G/G/1-Warteschlange, wobei wir bereits auf die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf die später folgenden Warteschlangen mit Gruppenbedienung achten. Die Modellierung des Bediensystems folgt einer Idee von Chen und Yao [Che01]. Anstelle von funktionalen Grenzwertsätzen verwenden wir die Konvergenz in Verteilung, weil sich diese auf den Fall mit Gruppenbedienung übertragen läßt.

### 5.1 Konstruktion des G/G/1-Warteschlangensystems

Seien  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $\rho$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  definiert wie in Abschnitt 4.2.

Zusätzlich wählt man folgende Bezeichnungen: Sei  $(B(t))_{t \in [0, \infty)}$  die akkumulierte Zeit, die der Bediener bis zum Zeitpunkt  $t$  tätig war. Man nennt diese die **akkumulierte Bedienzeit**.

Es sei  $(I(t))_{t \in [0, \infty)}$  die akkumulierte Zeit, die das Warteschlangensystem bis zum Zeitpunkt  $t$  leer war, also die **akkumulierte Stillstandszeit**.

Damit ergeben sich folgende Beziehungen:

$$Q(t) = Q(0) + A(t) - S(B(t)) \quad \forall t \geq 0 \quad (5.1)$$

$$B(t) = \int_0^t 1_{\{Q(s) > 0\}} ds \quad \forall t \geq 0 \quad (5.2)$$

$$I(t) = t - B(t) = \int_0^t 1_{\{Q(s) = 0\}} ds \quad \forall t \geq 0. \quad (5.3)$$

### 5.2 Analyse der Warteschlange

Die Gleichung (5.1) kann man umformen:

$$Q(t) = \underbrace{Q(0) + (\lambda - \nu)t + [A(t) - \lambda t] - [S(B(t)) - \nu B(t)]}_{=: X(t)} + \underbrace{\nu I(t)}_{=: Y(t)}, \quad (5.4)$$

wobei die einzelnen Summanden folgende Interpretationen erlauben:

Es sind  $Q(0)$  der Startwert als konstante Verschiebung,  $(\lambda - \nu)t$  die Drift des Warteschlangenprozesses und  $[A(t) - \lambda t]$  und  $[S(B(t)) - \nu B(t)]$  die zufällige Variation des

Ankunfts- beziehungsweise des Bedienprozesses. Wegen  $t = B(t) + I(t)$  letztlich schließt sich noch  $\nu I(t)$  an.

Man kann nun  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  als den durch die 0-Schranke ungehinderten Teil der Bewegung der Warteschlange auffassen. Dem gegenüber ist  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  der Teil der Bedienrate, der durch Phasen des Leerlaufs verloren geht. Ersteren Teilprozeß kann man nun wie folgt approximieren:

**Theorem 5.1.**

Sei  $(Br(s, \mu, \sigma^2)(t))_{t \in [0, \infty)}$  eine Brownsche Bewegung, die in  $s \in \mathbb{R}$  startet, mit Drift  $\mu \in \mathbb{R}$  und Diffusionskoeffizient  $\sigma \geq 0$ .

Für  $\rho \rightarrow 1$  gilt:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(Q(0), \lambda - \nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 (\rho \wedge 1))(t). \quad (5.5)$$

*Beweis:*  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$  sind Zählprozesse und daher gilt mit (2.36):

$$\begin{aligned} A(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \lambda, \lambda^3 \sigma_a^2) \\ S(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \nu, \nu^3 \sigma_s^2). \end{aligned}$$

Also folgt:

$$S(t) - \nu t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, \nu^3 \sigma_s^2).$$

Weiter gilt:

$$B(t) \xrightarrow[\rho \rightarrow 1]{f.s.} t (\rho \wedge 1).$$

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich:

$$\begin{aligned} S(B(t)) - \nu B(t) &\xrightarrow[\rho \rightarrow 1]{f.s.} S(t (\rho \wedge 1)) - \nu t (\rho \wedge 1) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, \nu^3 \sigma_s^2)(t (\rho \wedge 1)) \\ &\stackrel{d}{=} Br(0, 0, \nu^3 \sigma_s^2 (\rho \wedge 1))(t). \end{aligned}$$

Außerdem ist:

$$A(t) - \lambda t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, \lambda^3 \sigma_a^2).$$

Da die Warteschlange laut Annahme fast immer ausgelastet ist, können wir  $S(B(t)) - \nu B(t)$  und  $A(t) - \lambda t$  als stochastisch unabhängig annehmen. Daher folgt mit der Definition von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Behauptung.  $\square$

Bewußt haben wir  $B(t)$  durch  $t(\rho \wedge 1)$  ersetzt, obwohl  $B(t)$  für  $\rho \rightarrow 1$  natürlich gleich  $t$  sein sollte. Das asymptotische Verhalten von  $B(t)$  entspricht für ein festes  $\rho < 1$  bei  $t \rightarrow \infty$  allerdings dem von  $t(\rho \wedge 1)$ . Das heißt  $B(t) \sim t(\rho \wedge 1)$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Die Konvergenz der Zählprozesse  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$  gegen eine Brownsche Bewegung zur Approximation des Warteschlangenprozesses zu verwenden ist die Grundidee der Diffusionsapproximation.

### 5.3 Durch Reflektion von $X$ zu $Q$

Da wir aber nicht  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ , sondern  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  approximieren wollen, stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang dieser Prozesse. Dafür konstruieren wir einen pfadweisen Zusammenhang zwischen  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$ .

**Theorem 5.2.** (*Abbildung auf  $Q$* )

Die Prozesse  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  erfüllen die Beziehungen

$$Y = \Psi(X) \quad (5.6)$$

$$Q = \Phi(X), \quad (5.7)$$

wobei  $\Phi$  und  $\Psi$  wie in Definition 3.1 bestimmt sind.

*Beweis:* Die Pfade  $X(\omega, \cdot)$ ,  $Y(\omega, \cdot)$  und  $Q(\omega, \cdot)$  erfüllen (3.1) bis (3.3). Daraus folgt mit Lemma 3.3 die Behauptung.  $\square$

### 5.4 Die Diffusionsapproximation

**Theorem 5.3.**

Für  $\rho \rightarrow 1$  gilt:

$$Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} RBr(t), \quad (5.8)$$

wobei  $RBr$  die reflektierte Brownsche Bewegung  $(RBr(Q(0), \lambda - \nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 (\rho \wedge 1))(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist.

*Beweis:* Mit Theorem 5.1 gilt:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(t).$$

Da  $\Phi$  nach Lemma 3.2 stetig ist, folgt:

$$\Phi(X)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \Phi(Br)(t).$$

Nach Theorem 5.2 ist:

$$Q(t) = \Phi(X)(t).$$

Die Behauptung folgt nun mit der Definition der reflektierten Brownschen Bewegung.  $\square$

Also können wir für großes  $t$  die Warteschlangenlänge  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch die reflektierte Brownsche Bewegung  $(RBr(Q(0), \lambda - \nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 (\rho \wedge 1))(t))_{t \in [0, \infty)}$  approximieren. Von ihr sind sowohl die transiente Übergangswahrscheinlichkeitsdichte (siehe Theorem 3.1) als auch die ersten beiden Momentenfunktionen (siehe Theorem 3.4) bekannt.

## 5.5 Vergleich zur Diffusionsapproximation mit der Fokker-Planck-Gleichung

Wir wollen bereits hier auf einige Unterschiede zur traditionellen Diffusionsapproximation mittels der Fokker-Planck-Gleichung, wie sie in Kapitel 4 dargestellt wurde, hinweisen. Bei dem hier neu entwickelten Ansatz wird die durch Stillstandsphasen verlorene Bedienkapazität berücksichtigt.

Im Gegensatz dazu wurde zuvor  $t = B(t)$  angenommen, das heißt, daß Stillstandsphasen vernachlässigt werden, weil die Auslastung  $\rho$  gegen 1 geht. Allerdings ist bei der Approximation konkreter Warteschlangensysteme meist  $\rho < 1$ , so daß durchaus immer wieder Stillstandszeiten auftreten.

Wenn wir nun auf die stochastische Approximation in Kapitel 4 zurückschauen, finden wir ein recht ähnliches Ergebnis. In Theorem 4.2 kamen wir zu der Approximation von  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch  $(RBr(Q(0), \lambda - \nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 (\rho \wedge 1))(t))_{t \in [0, \infty)}$ .

In beiden Fällen wird eine Brownsche Bewegung in die positive Halbebene gespiegelt. In diesem Kapitel erfolgt dies pfadweise durch die Reflektionsabbildung (siehe Definition 3.1), so daß ein entsprechender stochastischer Prozeß, die reflektierte Brownsche Bewegung, definiert wird.

Bei dem Ansatz mittels der Fokker-Planck-Gleichung hingegen wird die Nicht-Negativität erst durch eine Manipulation der Wahrscheinlichkeitsdichte gewährleistet. Es zeigt sich aber, daß aus einer Diffusionsapproximation mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung mit gleichen Drift- und Diffusionskoeffizienten die gleiche Verteilung hervorgeht. Der Unterschied zwischen der Verteilung der Approximation aus diesem Kapitel und der aus Kapitel 4.2 entsteht also nicht durch die andere Herleitung der Reflektion, sondern bereits durch die unterschiedliche Modellierung der Stillstandszeiten, welche wiederum zu unterschiedlichen Koeffizienten führt.

Insofern liefert die Reflektion der Pfade mittels der Reflektionsabbildung eine intuitivere und anschaulichere Herleitung der herkömmlichen Reflektion der Brownschen Bewegung mittels einer Nebenbedingung für die Fokker-Planck-Gleichung.



## 6 Approximation der G/G/1(b,b)-Warteschlange

Mit einer der G/G/1-Approximation aus Kapitel 5 analogen Idee wollen wir nun eine Diffusionsapproximation für das G/G/1(b,b)-Warteschlangensystem herleiten. Die dabei auftretende zusätzliche Herausforderung besteht darin, daß der Zustandsraum nicht mehr nur durch eine undurchdringliche Schranke bei 0 nach unten beschränkt ist, sondern darüber hinaus bereits bei weniger als  $b$  Kunden im System Bedienkapazität verloren geht, weil dann keine Bedienung mehr stattfinden kann. Daher ist die Korrektur der Drift der Brownschen Bewegung komplizierter.

### 6.1 Konstruktion des G/G/1(b,b)-Warteschlangensystems

Seien  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  definiert wie in Abschnitt 4.2. Im Unterschied dazu gebe  $(S(t))_{t \in [0, \infty)}$  jedoch die Anzahl der bis zur akkumulierten Bedienzeit  $t$  bedienten Bediengruppen der Größe  $b$  an. Wie in Abschnitt 5.1 sei  $(B(t))_{t \in [0, \infty)}$  die akkumulierte Bedienzeit und  $(I(t))_{t \in [0, \infty)}$  die akkumulierte Stillstandszeit. Allerdings ist die **Auslastung** nun  $\rho = \frac{\lambda}{b\nu}$ .

Daraus ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$Q(t) = Q(0) + A(t) - bS(B(t)) \quad \forall t \geq 0 \quad (6.1)$$

$$B(t) = \int_0^t 1_{\{Q(s) \geq b\}} ds \quad \forall t \geq 0 \quad (6.2)$$

$$I(t) = t - B(t) = \int_0^t 1_{\{Q(s) < b\}} ds \quad \forall t \geq 0. \quad (6.3)$$

### 6.2 Analyse der Warteschlange

Analog zu (5.4) ergibt sich aus (6.1):

$$Q(t) = \underbrace{Q(0) + (\lambda - b\nu)t + [A(t) - \lambda t] - [bS(B(t)) - b\nu B(t)]}_{=:X(t)} + \underbrace{b\nu I(t)}_{=:Y(t)} \quad (6.4)$$

Diese Aufteilung erfolgt auf dieselbe Weise wie in dem Fall ohne Gruppenbedienung. Die Idee dabei ist wieder, daß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  der Teil der Bewegung von  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist,

der nicht durch Stillstand beeinträchtigt wird, während  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  die akkumulierte Bedienkapazität darstellt, die durch Stillstandszeiten verloren geht. Für den Teilprozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  gilt nun folgende Approximation:

**Theorem 6.1.**

Für  $\rho \rightarrow 1$  gilt mit den bereits eingeführten Notationen:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1))(t). \quad (6.5)$$

*Beweis:* Da  $A(t)$  und  $S(t)$  Zählprozesse sind, gilt mit (2.36):

$$\begin{aligned} A(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \lambda, \lambda^3 \sigma_a^2) \\ S(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \nu, \nu^3 \sigma_s^2). \end{aligned}$$

Also ist:

$$bS(t) - b\nu t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, b^2 \nu^3 \sigma_s^2)(t).$$

Weiter gilt:

$$B(t) \xrightarrow[\rho \rightarrow 1]{f.s.} t (\rho \wedge 1).$$

Mit diesen Ergebnissen folgt:

$$\begin{aligned} bS(B(t)) - b\nu B(t) &\xrightarrow[\rho \rightarrow 1]{f.s.} bS(t (\rho \wedge 1)) - b\nu t (\rho \wedge 1) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, b^2 \nu^3 \sigma_s^2)(t(\rho \wedge 1)) \\ &\stackrel{d}{=} Br(0, 0, b^2 \nu^3 \sigma_s^2 (\rho \wedge 1))(t). \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$A(t) - \lambda t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, \lambda^3 \sigma_a^2). \quad (6.6)$$

Wegen  $\rho \rightarrow 1$  können wir annehmen, daß  $A(t) - \lambda t$  und  $bS(t) - b\nu t$  stochastisch unabhängig sind. Deshalb folgt mit der Definition von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Behauptung.  $\square$

Nun haben wir  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  wie im Fall ohne Gruppenbedienung approximiert. Allerdings müssen wir auch diese Approximation wieder auf den Warteschlangenprozeß  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  übertragen, für den wir uns eigentlich interessieren.

### 6.3 Konstruktion der Abbildung

Im Fall der Gruppenbedienung ist der Zusammenhang zwischen den Prozessen  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  aufwendiger, da sich im Gegensatz zu dem einfachen Fall die Drift nicht erst zu Zeitpunkten mit  $Q(t) = 0$  sondern bereits zu solchen mit  $Q(t) \leq b$  ändert. Im Unterschied zu der 0-Schranke im Fall ohne Gruppenbedienung ist es aber möglich, daß der Prozeß den Zustand  $b$  unterschreitet. Es gibt an diesem Punkt keine undurchlässige Schranke, sondern eine Grenze, an der die Drift des Prozesses sich ändert, die jedoch von dem Prozeß überschritten werden kann.

Deshalb kann die Abbildung, die den Unterschied zwischen  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  analog dem Fall ohne Gruppenbedienung korrigieren soll, nicht wie die Abbildung  $\Phi$  aus Definition 3.1 auf dem Supremum basieren. Sie muß anders konstruiert werden.

Sei  $G_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch:

$$G_b(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq b-1 \\ b-x & \text{für } b-1 < x < b \\ 0 & \text{für } x \geq b. \end{cases}$$

Die Abbildung  $G_b$  ist offensichtlich stetig. Weiter gilt  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ :

$$|G_b(x) - G_b(y)| \leq |x - y|. \quad (6.7)$$

Diese Hilfsfunktion benötigen wir, um die Abbildung zu definieren, die den Prozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  mit dem Warteschlangenprozeß  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  verbindet.

**Definition 6.1.** (*Driftkorrekturabbildung*)

Die Abbildung  $\chi : D \rightarrow D$  mit

$$\chi(x)(0) := x(0) \quad (6.8)$$

$$\chi(x)(t) := x(t) + \int_0^t b\nu G_b(\chi(x)(s))ds. \quad (6.9)$$

heißt *Driftkorrekturabbildung*.

Nach Theorem 3.5 existiert dieses  $\chi(x)$ , ist eindeutig und Element von  $D$ .

Ziel ist eine stetige Abbildung,  $\chi : D \rightarrow D$  zu definieren, die zu der Ursprungsfunktion  $X \in D$  eine zusätzliche Drift  $b\nu$  addiert, sobald die Bildfunktion  $\chi(X) \in D$  kleiner oder gleich  $b-1$  ist, aber die Drift unverändert läßt, wenn die Bildfunktion  $\chi(X) \geq b$  ist. Für  $\chi(X)$  zwischen  $b-1$  und  $b$  wird die Abbildung mittels  $G_b$  geglättet, so daß  $\chi$  die Voraussetzungen von Theorem 3.6 erfüllt und wie gewünscht stetig ist. Wie diese Abbildung  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  miteinander verbindet, zeigen wir in Theorem 6.2.

Die zusätzliche Drift  $b\nu$  entspricht der Bedienrate, die bei einem untätigen Bediener wegfällt. Wir erinnern uns,  $X$  approximiert die Warteschlangenlänge so, als ob sie keine Bedienkapazität durch Stillstand verlieren würde. Das heißt,  $X$  hat die konstante Drift  $\lambda - b\nu$ . Durch diese Konstruktion wird gewährleistet, daß  $(\chi(X)(t))_{t \in [0, \infty)}$  bei Werten  $\leq b - 1$  die Drift  $\lambda$  und bei Werten  $\geq b$  die Drift  $\lambda - b\nu$  hat. Diese Drift entspricht anschaulich der von  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$ , weil für  $Q \geq b$  Bedienungen und Ankünfte stattfinden, während für  $Q \leq b - 1$  nur Ankünfte auftreten können.

An diesem Punkt ist noch zu zeigen, daß  $\chi$  wirklich die Pfade von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  auf die entsprechenden Pfade von  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  abbildet. Das ist durch die Definitionen von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ ,  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  jedoch schnell zu sehen.

**Theorem 6.2.**

$$\chi(X)(t) = Q(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (6.10)$$

*Beweis:* Aus (6.3) und (6.4) können wir folgern:

$$\begin{aligned} Q(t) &= X(t) + b\nu \int_0^t 1_{\{Q(s) < b\}} ds \quad \forall t \geq 0 \\ Q(0) &= X(0). \end{aligned}$$

Da  $Q(t) \in \mathbb{N}_0 \quad \forall t \geq 0$  gilt:

$$1_{\{Q(\cdot) < b\}} = G_b(Q(\cdot)).$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} Q(t) &= X(t) + \int_0^t b\nu G_b(Q(s)) ds \quad \forall t \geq 0 \\ Q(0) &= X(0), \end{aligned}$$

was wegen der Definition 6.1 von  $\chi$  die Behauptung impliziert. □

## 6.4 Die Diffusionsapproximation

Nun können wir die Ergebnisse der vorigen Abschnitte im folgenden Theorem zusammentragen:

**Theorem 6.3.**

Für  $\rho \rightarrow 1$  gilt:

$$Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \chi(Br)(t), \quad (6.11)$$

wobei  $Br$  eine Brownsche Bewegung  $(Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1))(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist.

*Beweis:* Nach Theorem 6.1 gilt:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(t).$$

Daraus folgt mit Theorem 3.6

$$\chi(X)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \chi(Br)(t)$$

und mit Theorem 6.2

$$Q(t) = \chi(X)(t).$$

□

Also haben wir eine zu dem Fall ohne Gruppenbedienung ganz ähnliche Approximation gefunden. Hier kann man den Warteschlangenprozeß  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  für große  $t$  durch  $(\chi(Br)(t))_{t \in [0, \infty)}$  approximieren. Allerdings muß noch die Verteilung von  $(\chi(Br)(t))_{t \in [0, \infty)}$  gefunden werden.

## 6.5 Die stochastische Differentialgleichung

### Theorem 6.4.

Sei  $(\tilde{Q}(t))_{t \in [0, \infty)}$  Lösung der stochastischen Differentialgleichung (SDE)

$$dQ(t) = \mu(Q(t)) dt + \sigma dW(t), \quad (6.12)$$

mit den Koeffizienten  $\mu(Q(t)) := \lambda - b\nu + b\nu G_b(Q(t))$  und  $\sigma := \sqrt{\lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)}$  und der Nebenbedingung  $\tilde{Q}(0) = Q(0)$ .

Dann gilt für  $t \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 1$

$$\tilde{Q}(t) \stackrel{d}{=} Q(t). \quad (6.13)$$

*Beweis:*

Da  $(\tilde{Q}(t))_{t \in [0, \infty)}$  Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist, gilt:

$$\tilde{Q}(t) - \tilde{Q}(0) = \int_0^t (\lambda - b\nu) + b\nu G_b(\tilde{Q}(s)) ds + \int_0^t \sigma dW(s).$$

Mit Berücksichtigung der Nebenbedingung ist:

$$\tilde{Q}(t) = Q(0) + (\lambda - b\nu)t + \sigma W(t) + \int_0^t b\nu G_b(\tilde{Q}(s)) ds.$$

Der Prozeß  $(Q(0) + (\lambda - b\nu)t + \sigma W(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist eine Brownsche Bewegung, das heißt:

$$\tilde{Q}(t) = Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1))(t) + \int_0^t b\nu G_b(\tilde{Q}(s)) ds.$$

Nun gilt nach der Definition 6.1 von  $\chi$ :

$$\tilde{Q}(t) = \chi \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)) \right) (t).$$

Aber nach Theorem 6.3 ist für  $t \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 1$  auch:

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \chi \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)) \right) (t).$$

□

Für die praktische Anwendung muß diese stochastische Differentialgleichung noch gelöst werden. Natürlich wäre die Kenntnis der transienten Wahrscheinlichkeitsdichte wünschenswert. Es gibt jedoch viele Möglichkeiten, die Verteilung der Lösung der SDE zu bestimmen.

Direkte Lösungsansätze für bestimmte Fälle findet man zum Beispiel in [Øks03]. Jedoch sind explizite Lösungen nur für Spezialfälle bekannt, so daß man in den meisten Fällen zu numerischen Lösungen greifen muß. Hier wird man vor allem bei [Klo99] fündig.

## 6.6 Die Abbildung mit Reflektion

Bis hier haben wir in diesem Kapitel gezeigt, daß der Warteschlangenprozeß  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung approximiert werden kann. Allerdings nimmt diese Lösung im Gegensatz zu dem Warteschlangenprozeß auch negative Werte an, so daß sie für praktische Zwecke nur bedingt zu gebrauchen ist. Wir können die Approximation verbessern, indem wir zu einer reflektierten stochastischen Differentialgleichung übergehen.

Zunächst ist aber zu zeigen, wie diese verfeinerte Annäherung funktioniert.

**Definition 6.2.** (*Reflektions- und Driftkorrekturabbildung*)

Die Abbildung  $\Upsilon : D_0 \rightarrow D$  mit

$$\Upsilon(x)(0) := x(0) \tag{6.14}$$

$$\Upsilon(x)(t) := \Phi \left( x(\cdot) + \int_0^\cdot b\nu G_b(\Upsilon(x)(s)) ds \right) (t) \quad \forall t \geq 0, \tag{6.15}$$

heißt *Reflektions- und Driftkorrekturabbildung*, wobei  $\Phi$  die *Reflektionsabbildung* aus Definition 3.1 ist.

Nach Theorem 3.7 existiert die Funktion  $\Upsilon(x)$ , ist eindeutig und Element von  $D$ . Nun bleibt zu zeigen, daß  $\Upsilon$  tatsächlich  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  auf  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  abbildet.

**Theorem 6.5.**

$$\Upsilon(X)(t) = Q(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (6.16)$$

*Beweis:* Nach (6.3) und (6.4) gilt

$$Q(t) = X(t) + b\nu \int_0^t 1_{\{Q(s) < b\}} ds \quad \forall t \geq 0 \quad (6.17)$$

$$Q(0) = X(0). \quad (6.18)$$

Da  $Q(t) \in \mathbb{N}_0$  ist, gilt für alle  $t \geq 0$ :

$$1_{\{Q(t) < b\}} = G_b(Q(t)). \quad (6.19)$$

Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} \Phi \left( X(\cdot) + \int_0^\cdot b\nu G_b(Q(s)) ds \right) (t) &\stackrel{(6.19)}{=} \Phi \left( X(\cdot) + \int_0^\cdot b\nu 1_{\{Q(s) < b\}} ds \right) (t) \\ &\stackrel{(6.17)}{=} \Phi(Q)(t) \\ &\stackrel{Q \geq 0}{=} Q(t) \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} Q(t) &= \Phi \left( X(\cdot) + \int_0^\cdot b\nu G_b(Q(s)) ds \right) (t) \quad \forall t \geq 0 \\ Q(0) &= X(0), \end{aligned}$$

was nach der Definition 6.2 von  $\Upsilon$  die Behauptung impliziert.  $\square$

## 6.7 Die Diffusionsapproximation mit Reflektion

Aus diesen Vorüberlegungen folgt nun die eigentliche verfeinerte Approximation.

**Theorem 6.6.**

Für  $\rho \rightarrow 1$  gilt:

$$Q(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \Upsilon(Br)(t), \quad (6.20)$$

wobei  $Br$  eine Brownsche Bewegung  $Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1))$  ist.

*Beweis:* Nach Theorem 6.1 ist:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(t).$$

Mit Theorem 3.8 folgt daraus:

$$\Upsilon(X)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \Upsilon(Br)(t).$$

Und nach Theorem 6.5 gilt weiter:

$$Q(t) = \Upsilon(X)(t).$$

□

Also kann man für große  $t$  und hohe Auslastung  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch  $(\Upsilon(Br)(t))_{t \in [0, \infty)}$  im Sinne der Verteilungskonvergenz approximieren.

Nur die Verteilung von  $(\Upsilon(Br)(t))_{t \in [0, \infty)}$  kennen wir noch nicht. Im Folgenden werden wir beschreiben, wie sich die numerischen Methoden einfach übertragen lassen.

## 6.8 Die reflektierte stochastische Differentialgleichung

### Theorem 6.7.

Sei  $(\tilde{Q}(t))_{t \in [0, \infty)}$  Lösung der reflektierten stochastischen Differentialgleichung (vergleiche Definition 3.5)

$$dQ(t) = \mu(Q(t)) dt + \sigma dW(t) + f(t), \quad (6.21)$$

mit den Koeffizienten  $\mu(x) := \lambda - b\nu + b\nu G_b(x)$  und  $\sigma := \sqrt{\lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)}$  und der Nebenbedingung  $\tilde{Q}(0) = Q(0)$ .

Dann gilt für  $t \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 1$

$$\tilde{Q}(t) \stackrel{d}{=} Q(t). \quad (6.22)$$

*Beweis:*

Da  $(\tilde{Q}(t))_{t \in [0, \infty)}$  Lösung der reflektierten stochastischen Differentialgleichung ist, gilt:

$$\tilde{Q}(t) = \Phi \left( \tilde{Q}(0) + \int_0^\cdot (\lambda - b\nu) + b\nu G_b(\tilde{Q}(s)) ds + \int_0^\cdot \sigma dW(s) \right) (t).$$

Mit Berücksichtigung der Nebenbedingung ist:

$$\tilde{Q}(t) = \Phi \left( Q(0) + (\lambda - b\nu)(\cdot) + \sigma W(\cdot) + \int_0^\cdot b\nu G_b(\tilde{Q}(s)) ds \right) (t).$$



Der Prozeß  $(Q(0) + (\lambda - b\nu)t + \sigma W(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist eine Brownsche Bewegung, das heißt:

$$\tilde{Q}(t) = \Phi \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1))(\cdot) + \int_0^\cdot b\nu G_b(\tilde{Q}(s)) ds \right) (t).$$

Nun gilt nach der Definition 6.2 von  $\Upsilon$ :

$$\tilde{Q}(t) = \Upsilon \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)) \right) (t).$$

Aber nach Theorem 6.6 ist für  $t \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 1$  auch:

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \Upsilon \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)) \right) (t).$$

□

Zur numerischen Lösung dieser SDER werden wir in Kapitel 8 ein Verfahren darstellen. Quantitative Aussagen für die Anwendung werden wir damit in Kapitel 9 gewinnen.



## 7 Approximation der G/G/1(1,b)-Warteschlange

### 7.1 Konstruktion des G/G/1(1,b)-Warteschlangensystems

Seien  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  die in Abschnitt 4.2 definierten Prozesse und  $\rho := \frac{\lambda}{b\nu}$  die **Auslastung** des Systems.

Wieder nehmen wir an, daß die Bedienzeiten eine Folge stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $0 < \frac{1}{\nu} < \infty$  und Varianz  $0 < \sigma_s^2 < \infty$  bilden. Diese Folge wollen wir in diesem Fall aber aufteilen in verschiedene Teilfolgen  $i = 1, \dots, b$ , wobei  $i$  die Größe der jeweils bedienten Bediengruppe angibt. Es wird dabei angenommen, daß eine Bedienung sofort startet, wenn keine andere mehr stattfindet und mindestens ein Kunde im System ist. Dabei werden so viele Kunden bedient wie möglich, das heißt alle zu Beginn der Bedienung anwesenden, höchstens aber  $b$ . Sei nun  $(v_{i,j})_{i=1, \dots, b, j \in \mathbb{N}}$  jeweils die Dauer der  $j$ -ten Bedienung einer Bediengruppe der Größe  $i$ .

Wir betrachten nun für  $i = 1, \dots, b$  getrennte Bedienprozesse  $(S_i(t))_{t \in [0, \infty)}$ , die jeweils die Anzahl der Bediengruppen der Größe  $i$ , die bis zur akkumulierten Bedienzeit  $t$  von Bediengruppen der Größe  $i$  abgefertigt wurden, angeben.

Das heißt für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \geq 0$  und  $i = 1, \dots, b$  gilt:

$$U(n) := \sum_{j=1}^n u_j \quad (7.1)$$

$$V_i(n) := \sum_{j=1}^n v_{i,j} \quad (7.2)$$

$$A(t) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid U(n) \leq t\} \quad (7.3)$$

$$S_i(t) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid V_i(n) \leq t\}. \quad (7.4)$$

Wir versuchen also, die Bedienprozesse verschieden großer Bediengruppen zu trennen. Diese Trennung ist notwendig, weil die Bedienung einer Bediengruppe der Größe  $i = 1$  den Prozeß einen Zustand nach links springen läßt, während die Bedienung einer Bediengruppe der Größe  $b$  den Prozeß  $b$  Zustände nach links springen läßt. Das führt zunächst dazu, daß die Bedienprozesse in der Zerlegung des Warteschlangenprozesses

unterschiedlich stark gewichtet werden müssen. Im Weiteren führt dies dann zu unterschiedlich starker Drift.

Allerdings lassen sich die Bedienprozesse nicht vollständig trennen, da die Bedienungen nicht gleichzeitig stattfinden können. Um die daraus entstehenden Zusammenhänge modellieren zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Wie zuvor sei  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Anzahl der Kunden im System zum Zeitpunkt  $t$ . Für  $x, y \in \mathbb{N}_0$  sei  $\hat{Q}(x, y) \subset \mathbb{R}_0^+$  die (zufällige) Menge der Zeitpunkte, an denen  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  von  $x$  nach  $y$  springt. Sei  $(BB(t))_{t \in [0, \infty)}$  der letzte Beginn einer Bedienung vor  $t$ , beziehungsweise 0 falls noch keine begonnen hat, das heißt:

$$BB(t) := \max\{t' \in [0, t] \mid t' \in \hat{Q}(0, 1) \vee t' = 0 \vee t' \in \hat{Q}(x, y) \wedge x > y > 0\}.$$

Sei  $(KB(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Anzahl der Kunden, die zu Beginn der gerade stattfindenden Bedienung warteten, beziehungsweise 0 wenn gerade keine Bedienung stattfindet:

$$KB(t) := \min(Q(BB(t)), Q(t)).$$

Nur für  $Q(t) = 0$  gilt  $KB(t) = Q(t) = 0$ . In diesem Fall ist die letzte Bedienung, die zum Zeitpunkt  $BB(t)$  startete, bereits beendet und das Wartesystem danach gerade leer. Ansonsten gilt immer  $KB(t) = Q(BB(t)) \leq Q(t)$ , weil  $Q(t)$  sich nur durch Ankünfte nach dem Zeitpunkt  $BB(t)$  von  $Q(BB(t))$  unterscheiden kann.

Für  $t \geq 0$  und  $i = 0, \dots, b-1$  seien

$$\begin{aligned} B_b(t) &:= \int_0^t 1_{\{KB(s) \geq b\}} ds \\ B_i(t) &:= \int_0^t 1_{\{KB(s) = i\}} ds. \end{aligned}$$

Für  $i = 1, \dots, b$  ist  $(B_i(t))_{t \in [0, \infty)}$  die akkumulierte Zeit, die bis zum Zeitpunkt  $t$  an Bediengruppen der Größe  $i$  gearbeitet wurde. Analog zu  $I(t)$  gibt  $B_0(t)$  die akkumulierte Stillstandszeit bis zum Zeitpunkt  $t$  an.

Damit läßt sich die Anzahl der Kunden im System  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  wie folgt ausdrücken:

$$Q(t) = Q(0) + A(t) - \sum_{i=1}^b i S_i(B_i(t)) \quad \forall t \geq 0. \quad (7.5)$$

## 7.2 Analyse der Warteschlange

Mit der Definition der  $(B_i(t))_{t \in [0, \infty)}$  für alle  $t \geq 0$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^b B_i(t) &= \sum_{i=0}^{b-1} \int_0^t 1_{\{KB(s)=i\}} ds + \int_0^t 1_{\{KB(s) \geq b\}} ds \\
 &= \int_0^t \sum_{i=0}^{b-1} 1_{\{KB(s)=i\}} + 1_{\{KB(s) \geq b\}} ds \\
 &= \int_0^t 1 ds \\
 &= t.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Nun entwickeln wir in derselben Weise wie in den Kapiteln zuvor eine Zerlegung des Warteschlangenprozesses  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  in einen Teil  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$ , der unbeeinflusst durch den Verlust von Bedienkapazität durch niedrige Auslastung ist, und einen Teil  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$ , der genau diesen akkumulierten Verlust von Bedienkapazität umfaßt.

$$\begin{aligned}
 Q(t) &\stackrel{(7.5)}{=} Q(0) + A(t) - \sum_{i=1}^b i S_i(B_i(t)) \\
 &= Q(0) + (\lambda - b\nu)t + (A(t) - \lambda t) - \sum_{i=1}^b (i S_i(B_i(t)) - i\nu B_i(t)) \\
 &\quad + b\nu t - \sum_{i=1}^b i\nu B_i(t) - 0\nu B_0(t) \\
 &\stackrel{(7.6)}{=} Q(0) + (\lambda - b\nu)t + (A(t) - \lambda t) - \sum_{i=0}^b (i S_i(B_i(t)) - i\nu B_i(t)) \\
 &\quad + b\nu \sum_{i=0}^b B_i(t) - \sum_{i=0}^b i\nu B_i(t) \\
 &= \underbrace{Q(0) + (\lambda - b\nu)t + (A(t) - \lambda t) - \sum_{i=0}^b (i S_i(B_i(t)) - i\nu B_i(t))}_{=: X(t)} \\
 &\quad + \underbrace{\nu \sum_{i=0}^b (b - i) B_i(t)}_{=: Y(t)}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Also gilt:

$$Y(t) = \nu \int_0^t b \cdot 1_{\{KB(s)=0\}} + \dots + 1 \cdot 1_{\{KB(s)=b-1\}} + 0 \cdot 1_{\{KB(s) \geq b\}} ds \quad \forall t \geq 0. \tag{7.8}$$

Für die Approximation ist es notwendig, die akkumulierte durch niedrige Auslastung verlorene Bedienkapazität  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  in Abhängigkeit von  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  auszudrücken. Nur so läßt sich die Konvergenz von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch die reflektierte Integralgleichung auf  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  übertragen.

Wir erinnern uns,  $(KB(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist die Anzahl der Kunden, die zu Beginn der gerade stattfindenden Bedienung warteten, beziehungsweise 0, wenn gerade keine Bedienung stattfindet. Der Prozeß  $(KB(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist also ein Maß dafür, wieviele Kunden gerade bedient werden könnten.  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$ , die Anzahl der Kunden im System kann nach oben davon abweichen; und zwar genau dann, wenn inzwischen zusätzliche Kunden angekommen sind. Letztere müssen dann auf (mindestens) die nächste Bedienung warten, obwohl gerade ein Bedienvorgang stattfindet. Trotzdem ist die Anzahl der Kunden, die gerade bedient werden könnten, ungefähr gleich der Anzahl der Kunden im System. Deshalb approximieren wir nun  $(KB(t))_{t \in [0, \infty)}$  mit  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$ :

$$Q(t) \approx X(t) + \nu \int_0^t b \cdot 1_{\{Q(s)=0\}} + \dots + 1 \cdot 1_{\{Q(s)=b-1\}} + 0 \cdot 1_{\{Q(s) \geq b\}} ds \quad \forall t \geq 0. \quad (7.9)$$

Mit diesem Zusammenhang können wir später die Approximation von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  auf  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  übertragen. Nun stellen wir aber zunächst die von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  zur Verfügung:

**Theorem 7.1.** (*Approximation von X*)

Für  $\rho \rightarrow 1$  gilt:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)). \quad (7.10)$$

*Beweis:* Da  $(S_i(t))_{t \in [0, \infty)}$  und  $(A(t))_{t \in [0, \infty)}$  Zählprozesse sind, gilt mit (2.36):

$$\begin{aligned} A(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \lambda, \lambda^3 \sigma_a^2) \\ S_i(t) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, \nu, \nu^3 \sigma_s^2). \end{aligned}$$

Also ist:

$$iS_i(t) - i\nu t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, i^2 \nu^3 \sigma_s^2)(t).$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} B_b(t) &\xrightarrow[\rho \rightarrow 1]{f.s.} t(\rho \wedge 1) \\ B_i(t) &\xrightarrow[\rho \rightarrow 1]{f.s.} 0, \text{ für } i = 0, \dots, b-1. \end{aligned}$$

Und mit diesen Ergebnissen folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^b iS(B_i(t)) - i\nu B_i(t) &\xrightarrow[\rho \rightarrow 1]{f.s.} bS_b(t(\rho \wedge 1)) - b\nu t(\rho \wedge 1) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, b^2\nu^3\sigma_s^2)(t(\rho \wedge 1)) \\ &\stackrel{d}{=} Br(0, 0, b^2\nu^3\sigma_s^2(\rho \wedge 1))(t). \end{aligned}$$

Genauso gilt:

$$A(t) - \lambda t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(0, 0, \lambda^3\sigma_a^2). \quad (7.11)$$

Wegen  $\rho \rightarrow 1$  können wir annehmen, daß  $A(t) - \lambda t$  und  $bS_b(t) - b\nu t$  stochastisch unabhängig sind. Deshalb folgt mit der Definition von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Behauptung.  $\square$

### 7.3 Die Abbildung von $X$ auf $Q$

Um die Approximation auf  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  zu übertragen, möchten wir wieder eine Abbildung definieren, die  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  mit  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  verbindet.

Dafür definieren wir die Hilfsfunktion  $H_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$H_b(x) := \begin{cases} b & \forall x \leq 0 \\ b - x & \forall 0 < x < b \\ 0 & \forall b \leq x. \end{cases}$$

**Definition 7.1.** (*Reflektions- und Driftkorrekturabbildung*)

Die Abbildung  $\Theta : D_0 \rightarrow D$  mit

$$\begin{aligned} \Theta(x)(0) &:= x(0) \\ \Theta(x)(t) &:= \Phi \left( x(\cdot) + \int_0^\cdot \nu H_b(\Theta(x)(s)) ds \right) (t) \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

heißt *Reflektions- und Driftkorrekturabbildung*, wobei  $\Phi$  die Reflektionsabbildung aus Definition 3.1 ist.

Nach Theorem 3.7 existiert die Funktion  $\Theta(x)$ , ist eindeutig und Element von  $D$ .

**Theorem 7.2.**

$$\Theta(X)(t) \approx Q(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (7.12)$$

*Beweis:* Da  $Q(t) \in \mathbb{N}_0$ , gilt für alle  $t \geq 0$ :

$$b \cdot 1_{\{Q(s)=0\}} + \dots + 1 \cdot 1_{\{Q(s)=b-1\}} + 0 \cdot 1_{\{Q(s) \geq b\}} = H_b(Q(t)). \quad (7.13)$$

Weiter ist für alle  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi \left( X(\cdot) + \int_0^\cdot \nu H_b(Q(s)) ds \right) (t) &\stackrel{(7.13)}{=} \Phi \left( X(\cdot) + \nu \int_0^\cdot b \cdot 1_{\{Q(s)=0\}} + \dots + 1 \cdot 1_{\{Q(s)=b-1\}} ds \right) (t) \\ &\stackrel{(7.9)}{\approx} \Phi(Q)(t) \\ &\stackrel{Q \geq 0}{=} Q(t). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} Q(0) &= X(0) \\ Q(t) &\approx \Phi \left( X(\cdot) + \int_0^\cdot \nu H_b(Q(s)) ds \right) (t) \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

was nach der Definition 7.1 von  $\Theta$  die Behauptung impliziert.  $\square$

## 7.4 Die Diffusionsapproximation mit Reflektion

Aus all diesen Vorarbeiten folgt nun die eigentliche verfeinerte Approximation.

**Theorem 7.3.**

Für  $\rho \rightarrow 1$  gilt:

$$Q(t) \approx \Theta(X)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \Theta(Br)(t), \quad (7.14)$$

wobei  $Br$  eine Brownsche Bewegung  $Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1))$  ist.

*Beweis:* Nach Theorem 7.1 ist:

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} Br(t).$$

Mit Theorem 3.8 folgt daraus:

$$\Theta(X)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \Theta(Br)(t).$$

Nach Theorem 7.2 gilt weiter:

$$Q(t) \approx \Theta(X)(t).$$

$\square$

Also kann man für große  $t$  und hohe Auslastung  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch  $(\Theta(Br)(t))_{t \in [0, \infty)}$  approximieren.



## 7.5 Die reflektierte stochastische Differentialgleichung

### Theorem 7.4.

Sei  $(\tilde{Q}(t))_{t \in [0, \infty)}$  Lösung der reflektierten stochastischen Differentialgleichung (vergleiche Definition 3.5)

$$dQ(t) = \mu(Q(t)) dt + \sigma dW(t) + f(t), \quad (7.15)$$

mit den Koeffizienten  $\mu(x) := \lambda - b\nu + \nu H_b(x)$  und  $\sigma := \sqrt{\lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)}$  und der Nebenbedingung  $\tilde{Q}(0) = Q(0)$ .

Dann gilt für  $t \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 1$

$$\tilde{Q}(t) \stackrel{d}{\approx} Q(t). \quad (7.16)$$

*Beweis:*

Da  $(\tilde{Q}(t))_{t \in [0, \infty)}$  Lösung der reflektierten stochastischen Differentialgleichung ist, gilt:

$$\tilde{Q}(t) = \Phi \left( \tilde{Q}(0) + \int_0^\cdot (\lambda - b\nu) + \nu H_b(\tilde{Q}(s)) ds + \int_0^\cdot \sigma dW(s) \right) (t).$$

Mit Berücksichtigung der Nebenbedingung ist:

$$\tilde{Q}(t) = \Phi \left( Q(0) + (\lambda - b\nu)(\cdot) + \sigma W(\cdot) + \int_0^\cdot \nu H_b(\tilde{Q}(s)) ds \right) (t).$$

Der Prozeß  $(Q(0) + (\lambda - b\nu)t + \sigma W(t))_{t \in [0, \infty)}$  ist eine Brownsche Bewegung, das heißt:

$$\tilde{Q}(t) = \Phi \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1))(\cdot) + \int_0^\cdot \nu H_b(\tilde{Q}(s)) ds \right) (t).$$

Nun folgt mit der Definition 7.1 von  $\Theta$ :

$$\tilde{Q}(t) = \Theta \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)) \right) (t).$$

Aber nach Theorem 7.3 ist für  $t \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 1$  auch:

$$Q(t) \stackrel{d}{\approx} \Theta \left( Br(Q(0), \lambda - b\nu, \lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)) \right) (t).$$

□

Für quantitative Aussagen ist es auch diesmal notwendig die reflektierte stochastische Differentialgleichung numerisch zu lösen. Ein Verfahren dafür wird in Kapitel 8 beschrieben. Numerische Ergebnisse stellen wir in Kapitel 9 dar.



# 8 Numerische Lösung

## 8.1 Numerische Approximation einer stochastischen Differentialgleichung

Für die meisten stochastischen Differentialgleichungen sind keine expliziten Lösungen bekannt. Unter schwachen Regularitäts- und Stetigkeitsbedingungen kann aber gezeigt werden, daß eine fast sicher eindeutige Lösung existiert (siehe Theoreme 2.6 und 2.7). Zur Bestimmung dieser Lösung wurden verschiedene numerische Lösungsverfahren entwickelt. Sie sind im Wesentlichen Verallgemeinerungen von denen für deterministische Differentialgleichungen. Auf diese Weise entstehen stochastische Rekursionsformeln, die nach dem Prinzip der unabhängigen Versuche stochastisch ausgewertet werden.

Die einfachste Approximation der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung liefert das **Eulerverfahren**. Dazu betrachten wir die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (8.1)$$

mit einem gegebenen Startwert  $X(t_0)$ .

Für eine gegebene Diskretisierung  $T_0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N = T_1$  des Intervalls  $[T_0, T_1]$  approximiert man beim Eulerverfahren den Lösungsprozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  mit dem stochastischen Prozeß  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$ , der rekursiv definiert ist durch:

$$Y(t_{n+1}) := Y(t_n) + \mu(t_n, Y(t_n))(t_{n+1} - t_n) + \sigma(t_n, Y(t_n))(W(t_{n+1}) - W(t_n)) \quad (8.2)$$

$$Y(t_0) := X(t_0), \quad (8.3)$$

wobei  $(W(t))_{t \in [0, \infty)}$  ein Wiener-Prozeß ist.

Für die Lösung der in dieser Arbeit relevanten stochastischen Differentialgleichungen benutzen wir nur äquidistante Schritte. Deshalb gilt:

$$t_n = T_0 + n \underbrace{\frac{T_1 - T_0}{N}}_{=: \delta} = T_0 + n\delta. \quad (8.4)$$

Falls  $\sigma \equiv 0$  ist, reduziert sich die stochastische Differentialgleichung auf eine gewöhnliche deterministische Differentialgleichung. Dasselbe gilt für das Eulerverfahren, das sich in diesem Fall auch auf das normale deterministische Eulerverfahren reduziert.

Wie in dem deterministischen Fall gibt es auch für stochastische Differentialgleichungen eine Vielfalt von numerischen Lösungsverfahren, zum Beispiel Einzelschritt- und Mehrschrittverfahren, explizite und implizite Verfahren. Eine gute Übersicht über geeignete Verfahren findet sich bei Kloeden und Platen [Klo99]. Die aus der Numerik bekannten Begriffe der Konvergenz und Konsistenz gelten im übertragenen (statistischen) Sinn:

**Definition 8.1.** (*Starke Konvergenz*)

Ein numerisches Lösungsverfahren  $(Y^\delta(t))_{t \in [0, \infty)}$  mit maximaler Schrittweite  $\delta > 0$  für eine stochastische Differentialgleichung mit Lösungsprozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  wird **stark konvergent mit der Rate  $r > 0$  zur Zeit  $t$**  genannt, genau dann wenn es ein  $C \in \mathbb{R}$  gibt, so daß

$$\forall \delta \in (0, \delta_0) : E(|X(t) - Y^\delta(t)|) \leq C\delta^r \quad (8.5)$$

für alle genügend kleinen  $\delta_0$  gilt.

Gilt (8.5) für alle  $t \geq 0$ , so wird das Verfahren insgesamt **stark konvergent mit der Rate  $r > 0$**  genannt.

**Definition 8.2.** (*Starke Konsistenz*)

Ein numerisches Lösungsverfahren  $(Y^\delta(t))_{t \in [0, \infty)}$  mit maximaler Schrittweite  $\delta > 0$  für eine stochastische Differentialgleichung mit Lösungsprozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  wird **stark konsistent** genannt, wenn es eine nicht-negative Funktion  $c(\delta)$  gibt, so daß für alle  $n = 0, \dots, N - 1$  gilt:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} c(\delta) = 0 \quad (8.6)$$

$$E \left( \left| E \left( \frac{Y^\delta(t_{n+1}) - Y^\delta(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \middle| X(t_n) \right) - \mu(t_n, Y^\delta(t_n)) \right|^2 \right) \leq c(\delta) \quad (8.7)$$

$$E \left( \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \left| Y^\delta(t_{n+1}) - Y^\delta(t_n) - E(Y^\delta(t_{n+1}) - Y^\delta(t_n) | X(t_n)) - \mu(t_n, Y^\delta(t_n))(W(t_{n+1}) - W(t_n)) \right|^2 \right) \leq c(\delta). \quad (8.8)$$

Bedingung 8.7 gewährleistet, daß die durchschnittliche Veränderung des Approximationsprozesses gegen die der Diffusion konvergiert. Im deterministischen Spezialfall, also bei einem Diffusionskoeffizienten von 0, entspricht sie der Definition der Konsistenz bei Approximationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen. Bedingung (8.8) hingegen sorgt dafür, daß die Varianz der Differenz zwischen den zufälligen Teilen des Approximationsprozesses und der Diffusion auch gegen null geht.

Da in unserem Fall  $\frac{d^2}{dx^2} \mu(t, x) \equiv \frac{d}{dx} \sigma(t, x) \equiv 0$  gilt (siehe Theorem 6.7), ist das Eulerverfahren äquivalent zum Milsteinverfahren, welches eine höhere Konvergenzrate hat. Nach Theorem 10.2.2 von Kloeden/Platen [Klo99] ist das Eulerverfahren für die vorliegende SDE stark konvergent mit der Rate 0,5. Darüber hinaus ist das Milsteinverfahren nach

Theorem 10.3.5 sogar konvergent mit der Konvergenzrate 1. In dem Abschnitt 10.3 von Kloeden/Platen findet man ebenfalls, daß das Milsteinverfahren stark konsistent ist. Da dieses Verfahren stabile und brauchbare Resultate erbringt, wählen wir es für unsere Untersuchung.

Das folgende Lemma zeigt, daß ein stark konvergentes numerisches Lösungsverfahren die Verteilung der Lösung der stochastischen Differentialgleichung approximiert.

**Lemma 8.1.** (*Stochastische Konvergenz*)

Sei  $(Y^\delta(t))_{t \in [0, \infty)}$  die Approximation einer stochastischen Differentialgleichung mit Lösungsprozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  durch ein zur Zeit  $t$  stark konvergentes numerisches Lösungsverfahren mit maximaler Schrittweite  $\delta$ . Dann gilt:

$$Y^\delta(t) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{P} X(t). \quad (8.9)$$

*Beweis:* Sei  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} P(|X(t) - Y^\delta(t)| \geq \epsilon) &= \int_{|X(t) - Y^\delta(t)| \geq \epsilon} 1 \, dP \\ &\leq \int_{|X(t) - Y^\delta(t)| \geq \epsilon} \frac{|X(t) - Y^\delta(t)|}{\epsilon} \, dP \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int |X(t) - Y^\delta(t)| \, dP \\ &= \frac{1}{\epsilon} E(|X(t) - Y^\delta(t)|) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht laut Definition der starken Konvergenz mit  $\delta \rightarrow 0$  gegen 0.  $\square$

Für kleine Schrittweiten können wir also davon ausgehen, daß Realisationen von  $Y(t)$  die Verteilung von  $X(t)$  approximieren. Um die Pfade von  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  iterativ zu bestimmen, müssen wir  $\Delta W_n := W(t_{n+1}) - W(t_n)$  Werte zuweisen. Da es sich um Zuwächse eines Wiener-Prozesses handelt, sind die Zufallsvariablen  $\Delta W_n$  stochastisch unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert  $E(W(t_{n+1}) - W(t_n)) = 0$  und Varianz  $\text{var}(W(t_{n+1}) - W(t_n)) = t_{n+1} - t_n = \delta$ .

Da die Bestimmung eines Pfades von  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  an sich einem Zufallsexperiment entspricht, ist es notwendig, die Berechnung zu replizieren, bis eine hinreichend große Stichprobe vorliegt, um statistisch gesichert auf die Verteilung von  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  schließen zu können.

Falls wie in den Approximationen der Warteschlangen der Theoreme 6.7 und 7.4 die stochastische Differentialgleichung zusätzlich homogen ist, hängen ihre Koeffizienten nicht von  $t$  ab. Zusammengefaßt hat die Iteration also folgende Form:

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + \delta \mu(Y(t_n)) + \Delta W_n \sigma(Y(t_n)), \quad (8.10)$$

wobei  $Y(t_0) = X(t_0)$  ist.

## 8.2 Numerik reflektierter stochastischer Differentialgleichungen

Das beschriebene Verfahren läßt sich an die Reflektion einer stochastischen Differentialgleichung anpassen. Pfadweise entspricht die Reflektion genau der Reflektionsabbildung  $\Phi$ , die in Definition 3.1 eingeführt wurde. Ferner entspricht jede Replikation des Eulerverfahrens einem Pfad des Lösungsprozesses der stochastischen Differentialgleichung. Folglich genügt es, die durch das Eulerverfahren approximierten Pfade einzeln zu reflektieren.

Deshalb kann die reflektierte stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + f(t) \quad (8.11)$$

mit reflektierender Schranke  $r$  mit folgendem modifiziertem Eulerverfahren approximiert werden:

$$Y(t_{n+1}) = \max(r, Y(t_n) + \mu(t_n, Y(t_n))(t_{n+1} - t_n) + \sigma(t_n, Y(t_n))(W(t_{n+1}) - W(t_n))) \quad (8.12)$$

$$Y(t_0) = X(t_0). \quad (8.13)$$

In unserem Fall läßt sich diese Rekursion durch die Benutzung äquidistanter Schritte und wegen der Homogenität der Koeffizienten wie folgt vereinfachen:

$$Y(t_{n+1}) = \max(r, Y(t_n) + \delta \mu(Y(t_n)) + \Delta W_n \sigma(Y(t_n))), \quad (8.14)$$

wobei wieder  $Y(t_0) = X(t_0)$  ist.

## 8.3 Evaluation der Ergebnisse

Mit den bis hier beschriebenen Verfahren können wir nun eine Anzahl von Experimenten  $i = 1, \dots, n$  durchführen, die jeweils einer Realisation  $Y_i(t) := Y(\omega_i, t)$  des stochastischen Prozesses  $(Y(t))_{t \in [0, \infty)}$  entsprechen. Für kleine Schrittweiten  $\delta$  können wir annehmen, daß sie genauso wie der Lösungsprozeß  $(X(t))_{t \in [0, \infty)}$  der reflektierten stochastischen Differentialgleichung (8.11) verteilt sind. Nach Theorem 6.7 wissen wir, daß eine solche (an  $r = 0$ ) reflektierte stochastische Differentialgleichung mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \mu(t, x) &= \lambda - b\nu + b\nu G_b(x) \\ \sigma(t, x) &= \sqrt{\lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)} \end{aligned}$$

für  $\rho \rightarrow 1$  und  $t \rightarrow \infty$  den Warteschlangenprozeß  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  eines G/G/1(b,b)-Wartesystems approximiert, während eine an  $r = 0$  reflektierte stochastische Differentialgleichung mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \mu(t, x) &= \lambda - b\nu + \nu H_b(x) \\ \sigma(t, x) &= \sqrt{\lambda^3 \sigma_a^2 + \nu^3 \sigma_s^2 b^2 (\rho \wedge 1)} \end{aligned}$$

für  $\rho \rightarrow 1$  und  $t \rightarrow \infty$  nach Theorem 7.4 den Warteschlangenprozeß  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  eines G/G/1(1,b)-Warteschlangensystems approximiert.

Für die Auswertung der numerischen Ergebnisse sind noch zwei Fragen offen. Erstens die der **Diskretisierung**: Wie schließen wir von der kontinuierlichen Verteilung von  $Y(t)$  auf die diskrete von  $Q(t)$ ? Und zweitens: Wie beurteilen wir die Güte der statistischen Schätzer, das heißt: Wie bestimmen wir **Konfidenzintervalle** für die geschätzten Größen?

Die verschiedenen möglichen Diskretisierungsmethoden hatten wir in Abschnitt 4.2.1 besprochen. In der vorliegenden Arbeit kommt nur der Ansatz von Kobayashi in Frage, weil er als einziger  $P(Q(t) = 0)$  mit einem Intervall  $[0, 1)$  schätzt, das komplett in der positiven Halbebene liegt und somit die Wahrscheinlichkeit für  $Q(t) = 0$  nicht unnötig unterschätzt wird. Allerdings kann im Gegensatz zu Mitzlaffs [Mit97] Vorgehen zur Diskretisierung keine direkte Korrektur an einem Term vorgenommen werden.

### 8.3.1 Konfidenzintervalle

Für  $i = 1, \dots, n$  seien  $Y_i(t) := Y(\omega_i, t)$  die gemäß (8.10) numerisch realisierten Pfade der reflektierten stochastischen Differentialgleichung.

Die Zufallsvariable  $\hat{p} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_B(Y_i(t))$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $p := P(Y(t) \in B)$ , wobei die Folge  $(1_B(Y_i(t)))_{i=1, \dots, n}$  aus i.i.d. verteilten Bernoulli-Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $p$  und Varianz  $p(1-p)$  besteht.

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\hat{p} := \frac{\sum_{i=1}^n 1_B(Y_i(t))}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} p \quad (8.15)$$

und nach dem zentralen Grenzwertsatz hat man

$$\frac{\sum_{i=1}^n 1_B(Y_i(t)) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1).$$

In Verbindung mit (8.15) kann man also für große  $n$  annehmen, daß

$$P(-\tau \leq \frac{\sum_{i=1}^n 1_B(Y_i(t)) - np}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} \leq \tau) = \Phi(\tau) - \Phi(-\tau)$$

ist, wobei  $\Phi$  die Standardnormalverteilung ist. Umformen ergibt:

$$P\left(p \in \left[\hat{p} - \tau \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + \tau \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]\right) = 1 - 2\Phi(-\tau).$$

Für ein Konfidenzintervall zum Niveau  $\alpha$  soll diese Wahrscheinlichkeit mindestens  $1 - \alpha$  betragen. Also ist

$$1 - 2\Phi(-\tau) \geq 1 - \alpha,$$

bzw.

$$\tau \geq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $\alpha$  für  $p := P(Y(t) \in B)$  lautet demnach

$$\left[ \hat{p} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right], \quad (8.16)$$

wobei  $\hat{p} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_B(Y_i(t))$  ist.

Darüber hinaus interessiert uns der Erwartungswert der Verteilung der Warteschlangenlänge und als Approximation für diesen wiederum der Erwartungswert der Lösung der reflektierten stochastischen Differentialgleichung  $E(Y(t))$ . Im Gegensatz zu den  $1_B(Y_i(t))$ , die Bernoulli-verteilt sind, kennt man im Fall der  $Y_i(t)$  die Varianz nicht.

Wir werden nun  $k$  Gruppen von jeweils  $l$  Replikationen  $(Y_{i,j}(t))_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,l}$  betrachten. So können wir für jede Gruppe  $i$  einen Stichprobendurchschnitt  $\hat{Y}_i(t) := \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l Y_{i,j}(t)$  bilden. Für ein ausreichend großes  $l$  können wir annehmen, daß diese Zufallsvariablen annähernd normalverteilt sind. Nach [Klo99] (Seite 312) reicht dafür erfahrungsgemäß  $l > 15$ . Der Durchschnitt dieser Stichprobendurchschnitte

$$\hat{Y}(t) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{Y}_i(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l Y_{i,j}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(t)$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $E(Y(t))$ . Die Varianz der Verteilung der  $\hat{Y}_i(t)$  kann mit Hilfe der Stichprobenvarianz

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\hat{Y}_i(t) - \hat{Y}(t))^2$$

geschätzt werden. Nimmt man die  $\hat{Y}_i(t)$  als normalverteilt an, ist bekanntermaßen

$$T_k := \frac{\hat{Y}(t) - E(Y(t))}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/k}}$$

nach der t-Verteilung mit  $k-1$  Freiheitsgraden verteilt (siehe z.B. [Klo99]). Also gilt

$$P(-\tau \leq \frac{\hat{Y}(t) - E(Y(t))}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/k}} \leq \tau) = t_{k-1}(\tau) - t_{k-1}(-\tau),$$

wobei  $t_{k-1}$  die Verteilungsfunktion der t-Verteilung mit  $k-1$  Freiheitsgraden ist.

Analog zu den Umformungen, die zu (8.16) führen, erhalten wir als Konfidenzintervall zum Niveau  $\alpha$  für  $E(Y(t))$

$$\left[ \hat{Y}(t) - t_{k-1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{k}}, \hat{Y}(t) + t_{k-1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{k}} \right], \quad (8.17)$$

wobei  $\hat{Y}(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(t)$ .



## Schätzung der Differenz der Wahrscheinlichkeiten

Später wollen wir die Verteilung der Lösung der reflektierten stochastischen Differentialgleichung mit der des simulierten Warteschlangenprozesses vergleichen. Dieser Vergleich läuft statistisch gesehen auf einen einfachen Mittelwertvergleich bei bekannter Varianz heraus.

Sei für  $i = 1, \dots, n$  zusätzlich  $Q_i(t) := Q(\omega_i, t)$  jeweils eine simulierte Realisation des Warteschlangenprozesses  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$ .

Dann ist

$$\hat{p}_Q - \hat{p}_Y := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_B(Q_i(t)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_B(Y_i(t))$$

ein erwartungstreuer Schätzer für

$$p_Q - p_Y := P(Q(t) \in B) - P(Y(t) \in B).$$

Die Zufallsvariablen  $1_B(Q_i(t))$  und  $1_B(Y_i(t))$  entstammen (in der Gesamtmenge) stochastisch unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erwartungswert  $p_Q$  und Varianz  $p_Q(1 - p_Q)$  beziehungsweise Erwartungswert  $p_Y$  und Varianz  $p_Y(1 - p_Y)$ . Deshalb hat  $1_B(Q_i(t)) - 1_B(Y_i(t))$  den Erwartungswert  $p_Q - p_Y$  und die Varianz  $p_Q(1 - p_Q) + p_Y(1 - p_Y)$ .

Damit folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz

$$\frac{\sum_{i=1}^n (1_B(Q_i(t)) - 1_B(Y_i(t))) - n(p_Q - p_Y)}{\sqrt{n(p_Q(1 - p_Q) + p_Y(1 - p_Y))}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

und man erhält genauso wie oben für  $p_Q - p_Y$  ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $\alpha$ :

$$[\hat{p}_Q - \hat{p}_Y - k_{Q+Y}, \hat{p}_Q - \hat{p}_Y + k_{Q+Y}], \quad (8.18)$$

wobei

$$k_{Q+Y} := \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{p}_Q(1 - \hat{p}_Q) + \hat{p}_Y(1 - \hat{p}_Y)}{n}}$$

die Fehlerbreite ist. Bezeichnen wir analog die in (8.16) genannten Fehlerbreiten der Schätzungen von  $P(Q(t) \in B)$  und  $P(Y(t) \in B)$  mit

$$k_Q := \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{p}_Q(1 - \hat{p}_Q)}{n}} \quad \text{und} \\ k_Y := \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{p}_Y(1 - \hat{p}_Y)}{n}},$$

so gilt bei gleichem Konfidenzniveau  $\alpha$

$$k_{Q+Y} = \sqrt{k_Q^2 + k_Y^2}. \quad (8.19)$$

## Schätzung der Differenz der Erwartungswerte

Darüber hinaus wollen wir auch die Differenz der Erwartungswerte der beiden Verteilungen schätzen. Genau wie bei der Schätzung des Erwartungswertes einer Verteilung gruppieren wir die Replikationen  $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$  und  $(Q_i)_{i=1,\dots,n}$  in jeweils  $k$  Gruppen von jeweils  $l$  Replikationen, also  $(Y_{i,j}(t))_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,l}$  und  $(Q_{i,j}(t))_{i=1,\dots,k;j=1,\dots,l}$ .

Nun können wir wiederum nach [Klo99] (Seite 312) für  $l > 15$  annehmen, daß die Stichprobendurchschnitte  $\hat{Y}_i(t) := \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l Y_{i,j}(t)$  und  $\hat{Q}_i(t) := \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l Q_{i,j}(t)$  normalverteilt sind.

Seien analog:

$$\begin{aligned}\hat{Q}(t) &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{Q}_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i(t) \\ \hat{Y}(t) &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{Y}_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(t) \\ \sigma_{\hat{Q}}^2 &:= \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\hat{Q}_i(t) - \hat{Q}(t))^2 \\ \sigma_{\hat{Y}}^2 &:= \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\hat{Y}_i(t) - \hat{Y}(t))^2.\end{aligned}$$

Also sind die  $(\hat{Y}_i(t))_{i=1,\dots,k}$  und die  $(\hat{Q}_i(t))_{i=1,\dots,k}$  stochastisch unabhängig und jeweils i.i.d normalverteilt mit

$$E(\hat{Q}_i(t)) - E(\hat{Y}_i(t)) = E(Q(t)) - E(Y(t)).$$

Die Schätzung von  $E(Q(t)) - E(Y(t))$  durch  $\hat{Q}(t) - \hat{Y}(t)$  ist also äquivalent zu der Schätzung von  $E(\hat{Q}_i(t)) - E(\hat{Y}_i(t))$  durch  $\hat{Q}(t) - \hat{Y}(t)$ . Das heißt, man kann das vorliegende Problem als eine Schätzung der Differenz der Erwartungswerte von zwei stochastisch unabhängigen, normalverteilten Populationen durch die Differenz der Stichprobendurchschnitte betrachten. Dieses nennt man das Behrens-Fisher-Problem. Für es geben Law und Kelton [Law00] (Seite 559) das Welchsche Konfidenzintervall an, das nach Welch [Wel38] benannt ist:

$$\left[ \hat{Q}(t) - \hat{Y}(t) - t_{\hat{f}}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma_{\hat{Q}}^2 + \sigma_{\hat{Y}}^2}{k}}, \hat{Q}(t) - \hat{Y}(t) + t_{\hat{f}}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma_{\hat{Q}}^2 + \sigma_{\hat{Y}}^2}{k}} \right],$$

wobei die geschätzten Freiheitsgrade  $\hat{f}$  folgende Form haben:

$$\hat{f} := \left\lfloor \frac{(k-1)(\sigma_{\hat{Q}}^2 + \sigma_{\hat{Y}}^2)^2}{\sigma_{\hat{Q}}^4 + \sigma_{\hat{Y}}^4} \right\rfloor = \left\lfloor (k-1) \left(1 + \frac{2\sigma_{\hat{Q}}^2 \sigma_{\hat{Y}}^2}{\sigma_{\hat{Q}}^4 + \sigma_{\hat{Y}}^4}\right) \right\rfloor \geq k-1.$$

Die Fehlerbreite dieses Konfidenzintervalls ist also

$$K_{Q+Y} := t_{\hat{f}}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_Q^2 + \hat{\sigma}_Y^2}{k}}.$$

Die Fehlerbreiten der oben entwickelten Konfidenzintervalle zur Schätzung von  $E(Q(t))$  beziehungsweise  $E(Y(t))$  sind nach (8.17) folgende:

$$K_Q := t_{k-1}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_Q^2}{k}}$$

$$K_Y := t_{k-1}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_Y^2}{k}}.$$

Für die t-Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden  $T_k$  gilt

$$T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} N(0, 1).$$

Deshalb wird die t-Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden in der Praxis für  $k > 30$  mit der Standardnormalverteilung approximiert. Weil in unserem Fall  $k > 31$  ist, gilt approximativ

$$t_{\hat{f}} \stackrel{d}{=} N(0, 1) \stackrel{d}{=} t_{k-1}.$$

und damit bei gleichem Konfidenzniveau  $\alpha$  auch

$$K_{Q+Y} = \sqrt{K_Q^2 + K_Y^2}. \quad (8.20)$$

Mit Hilfe von (8.19) und (8.20) ergeben sich die Konfidenzintervalle für die Schätzungen der Differenz der Wahrscheinlichkeiten und für die der Differenz der Erwartungswerte jeweils einfach aus den angegebenen Konfidenzintervallen für die geschätzten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte.



## 9 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel lösen wir die reflektierte stochastische Differentialgleichung mit Hilfe des Euler-Verfahrens und vergleichen die Resultate mit den Werten aus der ereignisorientierten Simulation. Die Verfahren werden anhand der Parameter  $\lambda, \nu, SCV(a), SCV(s), b$  und  $Q(0)$  gegliedert und miteinander verglichen. Die ereignisorientierte Simulation verwendet dabei lognormal-verteilte Zwischenankunfts- und Bedienzeiten. Die Berechnungen für Simulation und Euler-Verfahren wurden mit Hilfe eines eigens dafür programmierten Java-Programms durchgeführt.

Um zu vernünftigen Schätzungen zu gelangen, werden bei der Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten teilweise mehrere Zustände aggregiert (siehe jeweils Spalte 2 der Tabellen). Sowohl für das Eulerverfahren als auch für die Simulation verwenden wir immer 2000 Replikationen und für das Eulerverfahren immer 1000 äquidistante Zeitschritte.

Seien

$$SCV(a) := \frac{var(u_i)}{E(u_i)^2} = \sigma_a \lambda^2$$

$$SCV(s) := \frac{var(v_i)}{E(v_i)^2} = \sigma_s \nu^2$$

die quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten beziehungsweise der Bedienzeiten.

### 9.1 Approximation von Warteschlangen

Im ersten Experiment untersuchen wir ein G/G/1(b,b)-System mit einer Auslastung von  $\rho = 0,95$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	3 - 5	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	6 - 8	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	9 - 11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12 - 14	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	15 - 17	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	18 - 20	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	21 - 23	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	24 - 26	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	27 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	30 - 32	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	33 - 35	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	36 - 38	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	39 - 41	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	42 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	45 - 47	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	48 - 50	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0 - 2	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0115	[0,0059 ; 0,0171]
500,0	3 - 5	0,0920	[0,0793 ; 0,1047]	0,1780	[0,1612 ; 0,1948]	-0,0860	[-0,1070 ; -0,0650]
500,0	6 - 8	0,1970	[0,1796 ; 0,2144]	0,2795	[0,2598 ; 0,2992]	-0,0825	[-0,1088 ; -0,0562]
500,0	9 - 11	0,2205	[0,2023 ; 0,2387]	0,1810	[0,1641 ; 0,1979]	0,0395	[0,0147 ; 0,0643]
500,0	12 - 14	0,1660	[0,1497 ; 0,1823]	0,1235	[0,1091 ; 0,1379]	0,0425	[0,0207 ; 0,0643]
500,0	15 - 17	0,0975	[0,0845 ; 0,1105]	0,0775	[0,0658 ; 0,0892]	0,0200	[0,0025 ; 0,0375]
500,0	18 - 20	0,0720	[0,0607 ; 0,0833]	0,0620	[0,0514 ; 0,0726]	0,0100	[-0,0055 ; 0,0255]
500,0	21 - 23	0,0460	[0,0368 ; 0,0552]	0,0400	[0,0314 ; 0,0486]	0,0060	[-0,0066 ; 0,0186]
500,0	24 - 26	0,0305	[0,0230 ; 0,0380]	0,0205	[0,0143 ; 0,0267]	0,0100	[0,0002 ; 0,0198]
500,0	27 - 29	0,0225	[0,0160 ; 0,0290]	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0080	[-0,0003 ; 0,0163]
500,0	30 - 32	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0065	[0,0001 ; 0,0129]
500,0	33 - 35	0,0135	[0,0084 ; 0,0186]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0075	[0,0014 ; 0,0136]
500,0	36 - 38	0,0070	[0,0033 ; 0,0107]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0040	[-0,0004 ; 0,0084]
500,0	39 - 41	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0010	[-0,0018 ; 0,0038]
500,0	42 - 44	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0010	[-0,0014 ; 0,0034]
500,0	45 - 47	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[-0,0020 ; 0,0020]
500,0	48 - 50	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]
1000,0	0 - 2	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0085	[0,0031 ; 0,0139]
1000,0	3 - 5	0,0760	[0,0644 ; 0,0876]	0,1875	[0,1704 ; 0,2046]	-0,1115	[-0,1322 ; -0,0908]
1000,0	6 - 8	0,1845	[0,1675 ; 0,2015]	0,2540	[0,2349 ; 0,2731]	-0,0695	[-0,0951 ; -0,0439]
1000,0	9 - 11	0,2105	[0,1926 ; 0,2284]	0,1735	[0,1569 ; 0,1901]	0,0370	[0,0126 ; 0,0614]
1000,0	12 - 14	0,1555	[0,1396 ; 0,1714]	0,1320	[0,1172 ; 0,1468]	0,0235	[0,0018 ; 0,0452]
1000,0	15 - 17	0,1080	[0,0944 ; 0,1216]	0,0890	[0,0765 ; 0,1015]	0,0190	[0,0005 ; 0,0375]
1000,0	18 - 20	0,0855	[0,0732 ; 0,0978]	0,0515	[0,0418 ; 0,0612]	0,0340	[0,0184 ; 0,0496]
1000,0	21 - 23	0,0535	[0,0436 ; 0,0634]	0,0395	[0,0310 ; 0,0480]	0,0140	[0,0010 ; 0,0270]
1000,0	24 - 26	0,0380	[0,0296 ; 0,0464]	0,0255	[0,0186 ; 0,0324]	0,0125	[0,0016 ; 0,0234]
1000,0	27 - 29	0,0260	[0,0190 ; 0,0330]	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0120	[0,0033 ; 0,0207]
1000,0	30 - 32	0,0135	[0,0084 ; 0,0186]	0,0090	[0,0049 ; 0,0131]	0,0045	[-0,0020 ; 0,0110]
1000,0	33 - 35	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0070	[0,0005 ; 0,0135]
1000,0	36 - 38	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0045	[0,0000 ; 0,0090]
1000,0	39 - 41	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0005	[-0,0035 ; 0,0045]
1000,0	42 - 44	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0005	[-0,0024 ; 0,0034]
1000,0	45 - 47	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0035	[0,0003 ; 0,0067]
1000,0	48 - 50	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0010	[-0,0030 ; 0,0010]

Tabelle 9.1: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	12,946	[12,680 ; 13,211]	11,563	[11,347 ; 11,778]	1,383	[1,044 ; 1,722]
1000,0	13,814	[13,570 ; 14,058]	11,913	[11,635 ; 12,192]	1,901	[1,534 ; 2,267]

Tabelle 9.2: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Die numerischen Resultate zeigen, daß die transiente Verteilung der Lösung der SDER die Charakteristik der transienten Verteilung aus der ereignisorientierten Simulation recht gut trifft, obwohl erstere etwas stärker zentriert ist. Allerdings hat die Verteilung aus der Simulation eine größere Streuung als jene, die durch die Diffusionsapproximation geschätzt wird. Beide Prozesse haben weitgehend ihre stationären Verteilungen erreicht.

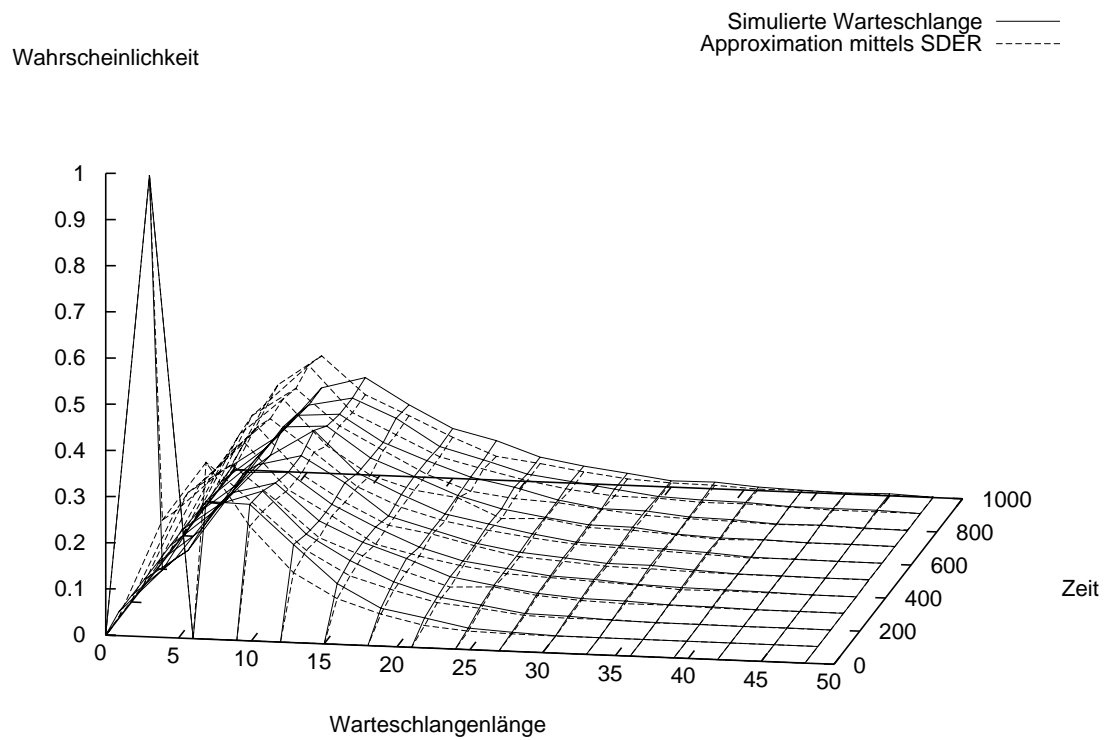


Abbildung 9.1: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

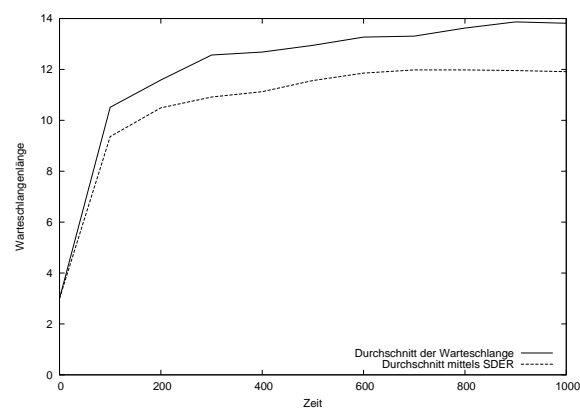


Abbildung 9.2: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Der Fehler der Diffusionsapproximation entsteht zum Teil dadurch, daß die Abhängigkeit von Ankunfts- und Abgangsprozeß vernachlässigt wird. Da diese Abhängigkeit mit steigender Auslastung geringer wird, ist damit auch eine Abnahme dieses Fehlers zu erwarten.

## 9.2 Effekte einer geänderten Auslastung

### Auslastung von 0,9

Dafür wählen wir nun eine geringere Auslastung von  $\rho = 0,9$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	3 - 5	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	6 - 8	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	9 - 11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12 - 14	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	15 - 17	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	18 - 20	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	21 - 23	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	24 - 26	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	27 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	30 - 32	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	33 - 35	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	36 - 38	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0 - 2	0,0160	[0,0105 ; 0,0215]	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0125	[0,0064 ; 0,0186]
500,0	3 - 5	0,1645	[0,1483 ; 0,1807]	0,3895	[0,3681 ; 0,4109]	-0,2250	[-0,2518 ; -0,1982]
500,0	6 - 8	0,3445	[0,3237 ; 0,3653]	0,3890	[0,3676 ; 0,4104]	-0,0445	[-0,0743 ; -0,0147]
500,0	9 - 11	0,2755	[0,2559 ; 0,2951]	0,1335	[0,1186 ; 0,1484]	0,1420	[0,1174 ; 0,1666]
500,0	12 - 14	0,1185	[0,1043 ; 0,1327]	0,0485	[0,0391 ; 0,0579]	0,0700	[0,0530 ; 0,0870]
500,0	15 - 17	0,0520	[0,0423 ; 0,0617]	0,0220	[0,0156 ; 0,0284]	0,0300	[0,0183 ; 0,0417]
500,0	18 - 20	0,0190	[0,0130 ; 0,0250]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0115	[0,0044 ; 0,0186]
500,0	21 - 23	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0010	[-0,0031 ; 0,0051]
500,0	24 - 26	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0025	[-0,0001 ; 0,0051]
500,0	27 - 29	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0012 ; 0,0022]
500,0	30 - 32	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	-0,0005	[-0,0022 ; 0,0012]
500,0	33 - 35	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
500,0	36 - 38	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	0 - 2	0,0180	[0,0122 ; 0,0238]	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0145	[0,0081 ; 0,0209]
1000,0	3 - 5	0,1655	[0,1492 ; 0,1818]	0,3850	[0,3637 ; 0,4063]	-0,2195	[-0,2463 ; -0,1927]
1000,0	6 - 8	0,3350	[0,3143 ; 0,3557]	0,3910	[0,3696 ; 0,4124]	-0,0560	[-0,0858 ; -0,0262]
1000,0	9 - 11	0,2715	[0,2520 ; 0,2910]	0,1395	[0,1243 ; 0,1547]	0,1320	[0,1073 ; 0,1567]
1000,0	12 - 14	0,1190	[0,1048 ; 0,1332]	0,0535	[0,0436 ; 0,0634]	0,0655	[0,0482 ; 0,0828]
1000,0	15 - 17	0,0460	[0,0368 ; 0,0552]	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0315	[0,0209 ; 0,0421]
1000,0	18 - 20	0,0290	[0,0216 ; 0,0364]	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0195	[0,0110 ; 0,0280]
1000,0	21 - 23	0,0115	[0,0068 ; 0,0162]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0100	[0,0050 ; 0,0150]
1000,0	24 - 26	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0020	[-0,0008 ; 0,0048]
1000,0	27 - 29	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[-0,0020 ; 0,0020]
1000,0	30 - 32	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
1000,0	33 - 35	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	36 - 38	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]

Tabelle 9.3: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.9$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$



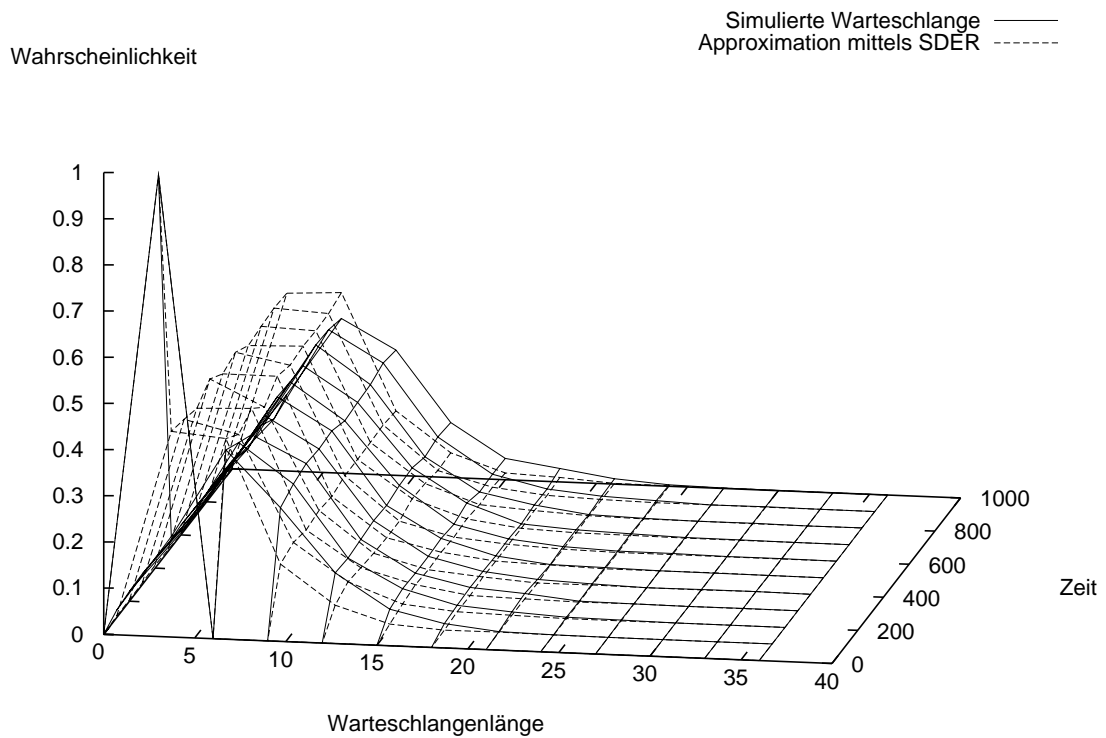


Abbildung 9.3: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.9$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

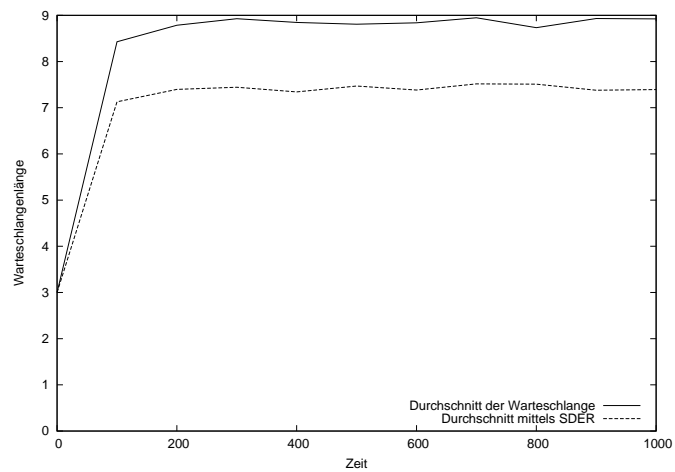


Abbildung 9.4: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.9$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	8,808	[8,668 ; 8,948]	7,469	[7,358 ; 7,580]	1,339	[1,161 ; 1,516]
1000,0	8,924	[8,783 ; 9,065]	7,393	[7,283 ; 7,503]	1,531	[1,354 ; 1,708]

Tabelle 9.4: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.9$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Da wir für die Approximation  $\rho \rightarrow 1$  angenommen haben, überrascht es nicht, daß eine niedrige Auslastung die Annäherung verschlechtert. Allerdings ist der Durchschnitt mit einem Fehler von unter 18% immer noch recht gut beschrieben. Die Verteilung des Lösungsprozesses der SDER ist aber stärker zentriert.

## Auslastung von 0,7

Nach dem vorhergehenden Beispiel stellt sich die Frage, wie sich die Ergebnisse bei noch niedrigerer Auslastung entwickeln. Daher untersuchen wir nun ein Bediensystem mit der Auslastung  $\rho = 0,7$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	1	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	3	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	4	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	5	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	6	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	7	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	8	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	9	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	10	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	1	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]
500,0	2	0,0370	[0,0287 ; 0,0453]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0370	[0,0287 ; 0,0453]
500,0	3	0,0915	[0,0789 ; 0,1041]	0,0465	[0,0373 ; 0,0557]	0,0450	[0,0294 ; 0,0606]
500,0	4	0,1695	[0,1531 ; 0,1859]	0,6320	[0,6109 ; 0,6531]	-0,4625	[-0,4893 ; -0,4357]
500,0	5	0,1920	[0,1747 ; 0,2093]	0,3070	[0,2868 ; 0,3272]	-0,1150	[-0,1416 ; -0,0884]
500,0	6	0,1945	[0,1772 ; 0,2118]	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	0,1815	[0,1635 ; 0,1995]
500,0	7	0,1545	[0,1387 ; 0,1703]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,1530	[0,1371 ; 0,1689]
500,0	8	0,1015	[0,0883 ; 0,1147]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,1015	[0,0883 ; 0,1147]
500,0	9	0,0485	[0,0391 ; 0,0579]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0485	[0,0391 ; 0,0579]
500,0	10	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]
500,0	11	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]
500,0	12	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	0	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
1000,0	1	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]
1000,0	2	0,0295	[0,0221 ; 0,0369]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0295	[0,0221 ; 0,0369]
1000,0	3	0,0930	[0,0803 ; 0,1057]	0,0305	[0,0230 ; 0,0380]	0,0625	[0,0477 ; 0,0773]
1000,0	4	0,1680	[0,1516 ; 0,1844]	0,6465	[0,6255 ; 0,6675]	-0,4785	[-0,5051 ; -0,4519]
1000,0	5	0,1895	[0,1723 ; 0,2067]	0,3110	[0,2907 ; 0,3313]	-0,1215	[-0,1481 ; -0,0949]
1000,0	6	0,1805	[0,1636 ; 0,1974]	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,1685	[0,1510 ; 0,1860]
1000,0	7	0,1760	[0,1593 ; 0,1927]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,1760	[0,1593 ; 0,1927]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
1000,0	8	0,1070	[0,0935 ; 0,1205]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,1070	[0,0935 ; 0,1205]
1000,0	9	0,0385	[0,0301 ; 0,0469]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0385	[0,0301 ; 0,0469]
1000,0	10	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]
1000,0	11	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
1000,0	12	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]

Tabelle 9.5: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.7$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	5,574	[5,510 ; 5,637]	4,807	[4,785 ; 4,829]	0,767	[0,700 ; 0,834]
1000,0	5,599	[5,536 ; 5,662]	4,809	[4,789 ; 4,829]	0,790	[0,724 ; 0,856]

Tabelle 9.6: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.7$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Die stationäre Verteilung wird wegen der niedrigen Auslastung erheblich schneller erreicht. Wie erwartet passen die Charakteristika der Verteilungen nicht mehr so gut zusammen wie zuvor. Die Verteilung der Lösung der SDER hat eine viel geringere Varianz als die der simulierten Warteschlange.

Trotzdem ist der Durchschnitt der Warteschlangenlänge mit einem Fehler von ca. 14% immer noch recht gut approximiert.

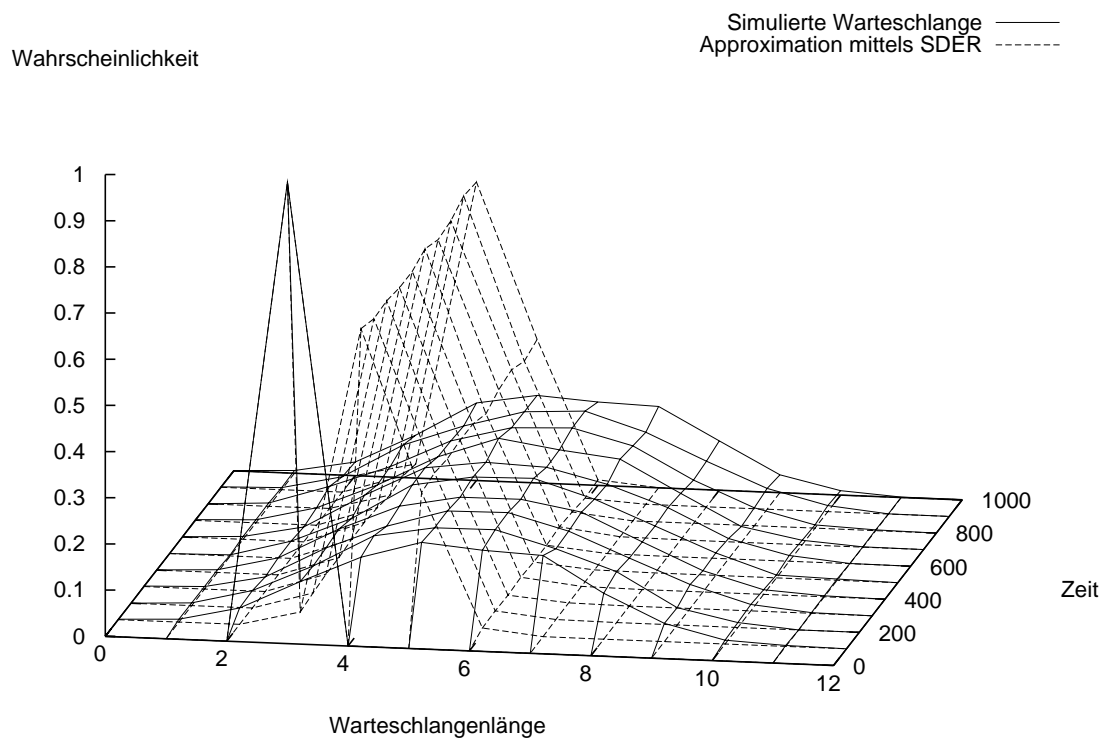


Abbildung 9.5: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.7$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

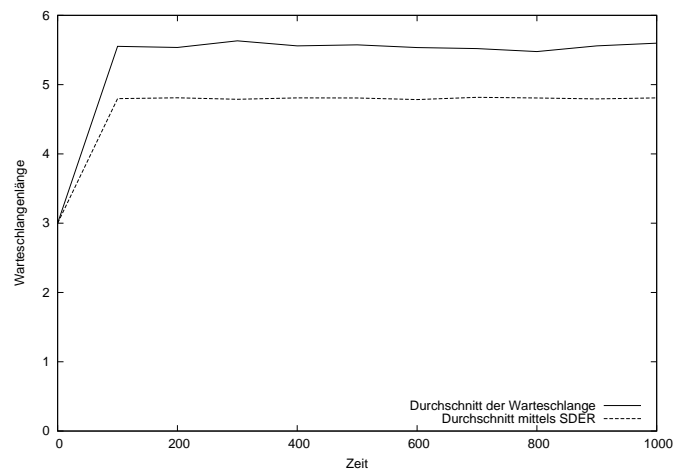


Abbildung 9.6: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.7$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

## Auslastung von 0,99

Bisher haben wir nur die Effekte niedrigerer Auslastungen untersucht. Es ist auch interessant, höhere Auslastungen zu untersuchen, denn in diesem Fall würden wir bessere Approximationen erwarten. Deshalb untersuchen wir nun ein G/G/1(b,b)-System mit  $\rho = 0,99$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0	0 - 11	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0	12 - 23	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	24 - 35	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	36 - 47	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	48 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	60 - 71	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	72 - 83	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	84 - 95	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	96 - 107	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	108 - 119	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	120 - 131	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	132 - 143	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	144 - 155	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	156 - 167	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	168 - 179	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	180 - 191	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	192 - 203	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	204 - 215	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	216 - 227	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	228 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	240 - 251	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	0 - 11	0,1185	[0,1043 ; 0,1327]	0,1110	[0,0972 ; 0,1248]	0,0075	[-0,0123 ; 0,0273]
5000	12 - 23	0,2370	[0,2184 ; 0,2556]	0,2475	[0,2286 ; 0,2664]	-0,0105	[-0,0371 ; 0,0161]
5000	24 - 35	0,1630	[0,1468 ; 0,1792]	0,1680	[0,1516 ; 0,1844]	-0,0050	[-0,0280 ; 0,0180]
5000	36 - 47	0,1345	[0,1195 ; 0,1495]	0,1285	[0,1138 ; 0,1432]	0,0060	[-0,0149 ; 0,0269]
5000	48 - 59	0,1110	[0,0972 ; 0,1248]	0,1025	[0,0892 ; 0,1158]	0,0085	[-0,0106 ; 0,0276]
5000	60 - 71	0,0705	[0,0593 ; 0,0817]	0,0755	[0,0639 ; 0,0871]	-0,0050	[-0,0211 ; 0,0111]
5000	72 - 83	0,0535	[0,0436 ; 0,0634]	0,0530	[0,0432 ; 0,0628]	0,0005	[-0,0134 ; 0,0144]
5000	84 - 95	0,0325	[0,0247 ; 0,0403]	0,0400	[0,0314 ; 0,0486]	-0,0075	[-0,0191 ; 0,0041]
5000	96 - 107	0,0195	[0,0134 ; 0,0256]	0,0275	[0,0203 ; 0,0347]	-0,0080	[-0,0174 ; 0,0014]
5000	108 - 119	0,0235	[0,0169 ; 0,0301]	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0060	[-0,0028 ; 0,0148]
5000	120 - 131	0,0125	[0,0076 ; 0,0174]	0,0105	[0,0060 ; 0,0150]	0,0020	[-0,0046 ; 0,0086]
5000	132 - 143	0,0090	[0,0049 ; 0,0131]	0,0080	[0,0041 ; 0,0119]	0,0010	[-0,0047 ; 0,0067]
5000	144 - 155	0,0070	[0,0033 ; 0,0107]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0030	[-0,0016 ; 0,0076]
5000	156 - 167	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0000	[-0,0041 ; 0,0041]
5000	168 - 179	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0005	[-0,0027 ; 0,0017]
5000	180 - 191	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
5000	192 - 203	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
5000	204 - 215	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	-0,0005	[-0,0015 ; 0,0005]
5000	216 - 227	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	228 - 239	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
5000	240 - 251	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
10000	0 - 11	0,1165	[0,1024 ; 0,1306]	0,0985	[0,0854 ; 0,1116]	0,0180	[-0,0012 ; 0,0372]
10000	12 - 23	0,2130	[0,1951 ; 0,2309]	0,2215	[0,2033 ; 0,2397]	-0,0085	[-0,0341 ; 0,0171]
10000	24 - 35	0,1575	[0,1415 ; 0,1735]	0,1685	[0,1521 ; 0,1849]	-0,0110	[-0,0339 ; 0,0119]
10000	36 - 47	0,1270	[0,1124 ; 0,1416]	0,1225	[0,1081 ; 0,1369]	0,0045	[-0,0160 ; 0,0250]
10000	48 - 59	0,0935	[0,0807 ; 0,1063]	0,0960	[0,0831 ; 0,1089]	-0,0025	[-0,0207 ; 0,0157]
10000	60 - 71	0,0815	[0,0695 ; 0,0935]	0,0820	[0,0700 ; 0,0940]	-0,0005	[-0,0175 ; 0,0165]
10000	72 - 83	0,0590	[0,0487 ; 0,0693]	0,0555	[0,0455 ; 0,0655]	0,0035	[-0,0109 ; 0,0179]
10000	84 - 95	0,0335	[0,0256 ; 0,0414]	0,0500	[0,0404 ; 0,0596]	-0,0165	[-0,0289 ; -0,0041]
10000	96 - 107	0,0295	[0,0221 ; 0,0369]	0,0265	[0,0195 ; 0,0335]	0,0030	[-0,0072 ; 0,0132]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
10000	108 - 119	0,0290	[0,0216 ; 0,0364]	0,0215	[0,0151 ; 0,0279]	0,0075	[-0,0022 ; 0,0172]
10000	120 - 131	0,0190	[0,0130 ; 0,0250]	0,0160	[0,0105 ; 0,0215]	0,0030	[-0,0051 ; 0,0111]
10000	132 - 143	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0105	[0,0060 ; 0,0150]	-0,0010	[-0,0072 ; 0,0052]
10000	144 - 155	0,0090	[0,0049 ; 0,0131]	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	-0,0005	[-0,0064 ; 0,0054]
10000	156 - 167	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0090	[0,0049 ; 0,0131]	-0,0040	[-0,0092 ; 0,0012]
10000	168 - 179	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	-0,0010	[-0,0049 ; 0,0029]
10000	180 - 191	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0035	[-0,0003 ; 0,0073]
10000	192 - 203	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0000	[-0,0034 ; 0,0034]
10000	204 - 215	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]
10000	216 - 227	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
10000	228 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	240 - 251	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0015	[-0,0032 ; 0,0002]

Tabelle 9.7: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.99$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
5000	42,837	[41,531 ; 44,143]	42,643	[41,329 ; 43,957]	0,194	[-1,641 ; 2,030]
10000	47,890	[46,382 ; 49,399]	48,194	[46,766 ; 49,622]	-0,303	[-2,361 ; 1,755]

Tabelle 9.8: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.99$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Die Approximation hat sich sichtbar verbessert. Die Verteilung der Lösung der SDER ist nur noch wenig stärker zentriert als die der Warteschlangenlänge. Beide Verteilungen sind sich sehr ähnlich.

Obwohl die stationäre Verteilung nur sehr langsam angenähert wird, sieht die Approximation schon nach einer kurzen Zeitspanne sehr gut aus. Folglich kann dieses Verfahren auch für die Vorhersage des transienten Verhaltens der Warteschlange genutzt werden.

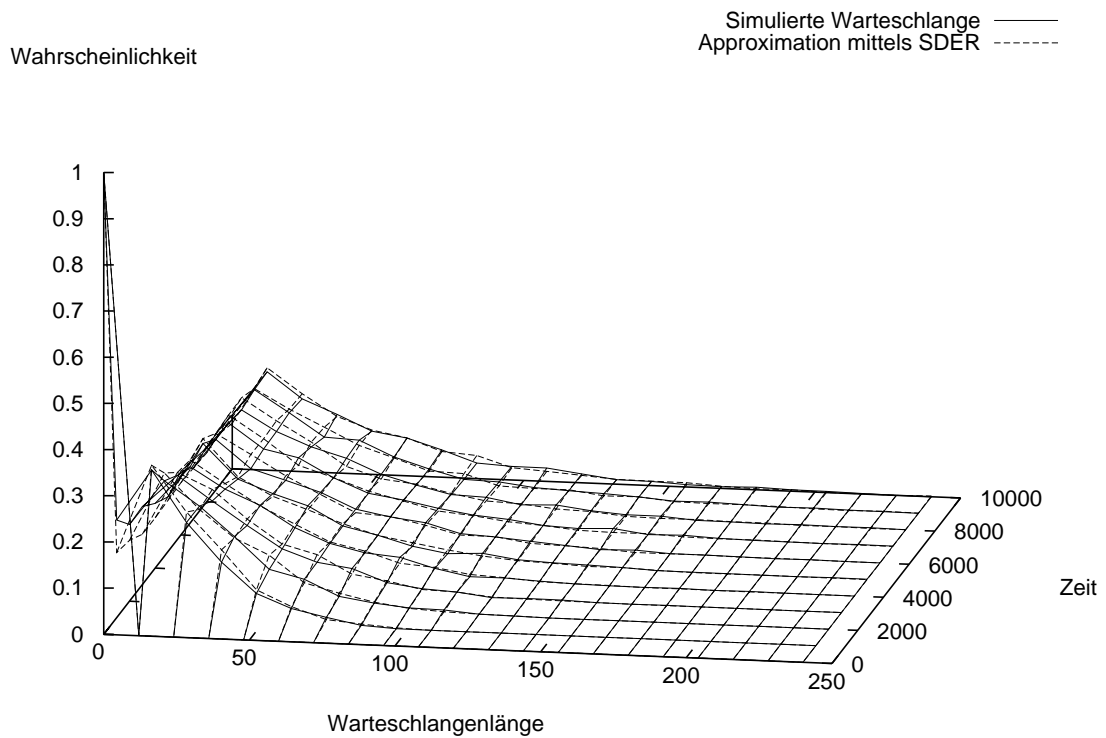


Abbildung 9.7: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.99$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

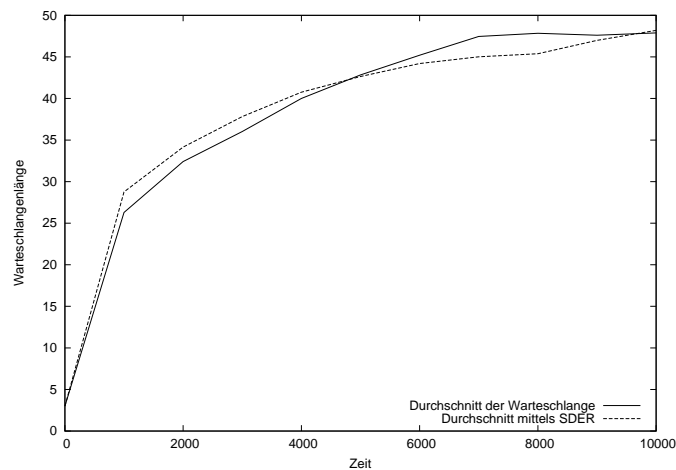


Abbildung 9.8: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.99$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

## Auslastung von 1

Wir erhöhen jetzt die Auslastung weiter auf  $\rho = 1$ . Auch ein Überlastfall ist es wert, untersucht zu werden, da in der Praxis vorübergehend auch solche Situationen auftreten, und wir mit der in dieser Arbeit entwickelten Diffusionsapproximation ja gerade auch das transiente Verhalten der Warteschlange analysieren möchten.

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0	0 - 14	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0	15 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	30 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	45 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	60 - 74	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	75 - 89	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	90 - 104	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	105 - 119	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	120 - 134	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	135 - 149	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	150 - 164	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	165 - 179	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	180 - 194	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	195 - 209	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	210 - 224	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	225 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	255 - 269	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	270 - 284	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	285 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	300 - 314	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	0 - 14	0,0930	[0,0803 ; 0,1057]	0,0850	[0,0728 ; 0,0972]	0,0080	[-0,0096 ; 0,0256]
5000	15 - 29	0,1665	[0,1502 ; 0,1828]	0,1675	[0,1511 ; 0,1839]	-0,0010	[-0,0241 ; 0,0221]
5000	30 - 44	0,1420	[0,1267 ; 0,1573]	0,1585	[0,1425 ; 0,1745]	-0,0165	[-0,0386 ; 0,0056]
5000	45 - 59	0,1370	[0,1219 ; 0,1521]	0,1275	[0,1129 ; 0,1421]	0,0095	[-0,0115 ; 0,0305]
5000	60 - 74	0,1165	[0,1024 ; 0,1306]	0,1200	[0,1058 ; 0,1342]	-0,0035	[-0,0235 ; 0,0165]
5000	75 - 89	0,0960	[0,0831 ; 0,1089]	0,0990	[0,0859 ; 0,1121]	-0,0030	[-0,0214 ; 0,0154]
5000	90 - 104	0,0820	[0,0700 ; 0,0940]	0,0785	[0,0667 ; 0,0903]	0,0035	[-0,0133 ; 0,0203]
5000	105 - 119	0,0585	[0,0482 ; 0,0688]	0,0475	[0,0382 ; 0,0568]	0,0110	[-0,0029 ; 0,0249]
5000	120 - 134	0,0385	[0,0301 ; 0,0469]	0,0395	[0,0310 ; 0,0480]	-0,0010	[-0,0130 ; 0,0110]
5000	135 - 149	0,0280	[0,0208 ; 0,0352]	0,0300	[0,0225 ; 0,0375]	-0,0020	[-0,0124 ; 0,0084]
5000	150 - 164	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0000	[-0,0081 ; 0,0081]
5000	165 - 179	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	0,0125	[0,0076 ; 0,0174]	0,0005	[-0,0065 ; 0,0075]
5000	180 - 194	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0100	[0,0056 ; 0,0144]	-0,0055	[-0,0108 ; -0,0002]
5000	195 - 209	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0000	[-0,0039 ; 0,0039]
5000	210 - 224	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0012 ; 0,0022]
5000	225 - 239	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[-0,0014 ; 0,0014]
5000	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0015	[-0,0032 ; 0,0002]
5000	255 - 269	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]
5000	270 - 284	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	-0,0005	[-0,0015 ; 0,0005]
5000	285 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	300 - 314	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	0 - 14	0,0680	[0,0570 ; 0,0790]	0,0490	[0,0395 ; 0,0585]	0,0190	[0,0045 ; 0,0335]
10000	15 - 29	0,1185	[0,1043 ; 0,1327]	0,1170	[0,1029 ; 0,1311]	0,0015	[-0,0185 ; 0,0215]
10000	30 - 44	0,1235	[0,1091 ; 0,1379]	0,1200	[0,1058 ; 0,1342]	0,0035	[-0,0168 ; 0,0238]
10000	45 - 59	0,1025	[0,0892 ; 0,1158]	0,1020	[0,0887 ; 0,1153]	0,0005	[-0,0183 ; 0,0193]
10000	60 - 74	0,1010	[0,0878 ; 0,1142]	0,0965	[0,0836 ; 0,1094]	0,0045	[-0,0140 ; 0,0230]
10000	75 - 89	0,0780	[0,0662 ; 0,0898]	0,0910	[0,0784 ; 0,1036]	-0,0130	[-0,0302 ; 0,0042]
10000	90 - 104	0,0825	[0,0704 ; 0,0946]	0,0860	[0,0737 ; 0,0983]	-0,0035	[-0,0207 ; 0,0137]
10000	105 - 119	0,0640	[0,0533 ; 0,0747]	0,0715	[0,0602 ; 0,0828]	-0,0075	[-0,0231 ; 0,0081]



Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
10000	120 - 134	0,0605	[0,0501 ; 0,0709]	0,0590	[0,0487 ; 0,0693]	0,0015	[-0,0132 ; 0,0162]
10000	135 - 149	0,0440	[0,0350 ; 0,0530]	0,0460	[0,0368 ; 0,0552]	-0,0020	[-0,0148 ; 0,0108]
10000	150 - 164	0,0365	[0,0283 ; 0,0447]	0,0375	[0,0292 ; 0,0458]	-0,0010	[-0,0127 ; 0,0107]
10000	165 - 179	0,0310	[0,0234 ; 0,0386]	0,0340	[0,0261 ; 0,0419]	-0,0030	[-0,0140 ; 0,0080]
10000	180 - 194	0,0235	[0,0169 ; 0,0301]	0,0285	[0,0212 ; 0,0358]	-0,0050	[-0,0149 ; 0,0049]
10000	195 - 209	0,0240	[0,0173 ; 0,0307]	0,0165	[0,0109 ; 0,0221]	0,0075	[-0,0012 ; 0,0162]
10000	210 - 224	0,0150	[0,0097 ; 0,0203]	0,0115	[0,0068 ; 0,0162]	0,0035	[-0,0036 ; 0,0106]
10000	225 - 239	0,0105	[0,0060 ; 0,0150]	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	-0,0025	[-0,0092 ; 0,0042]
10000	240 - 254	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0085	[0,0045 ; 0,0125]	-0,0045	[-0,0094 ; 0,0004]
10000	255 - 269	0,0065	[0,0030 ; 0,0100]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0010	[-0,0038 ; 0,0058]
10000	270 - 284	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[-0,0031 ; 0,0031]
10000	285 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0015	[-0,0032 ; 0,0002]
10000	300 - 314	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0005	[-0,0024 ; 0,0034]

Tabelle 9.9: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
5000	63,274	[61,741 ; 64,808]	64,039	[62,456 ; 65,623]	-0,765	[-2,948 ; 1,418]
10000	85,874	[83,797 ; 87,951]	89,002	[86,622 ; 91,381]	-3,128	[-6,257 ; 0,001]

Tabelle 9.10: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

In diesem Fall existiert keine stationäre Verteilung mehr, die mit wachsender Zeit angenähert wird. Entsprechend haben beide Verteilungen mit der Zeit immer stärkere Ausläufer nach oben.

Die Approximation hat sich durch die höhere Auslastung noch weiter verbessert. Abbildung 9.10 zeigt, daß der Durchschnitt der Warteschlangenlänge über den gesamten Zeitraum sehr gut geschätzt wird. Darüber hinaus sind die Verteilungen insgesamt sehr ähnlich.

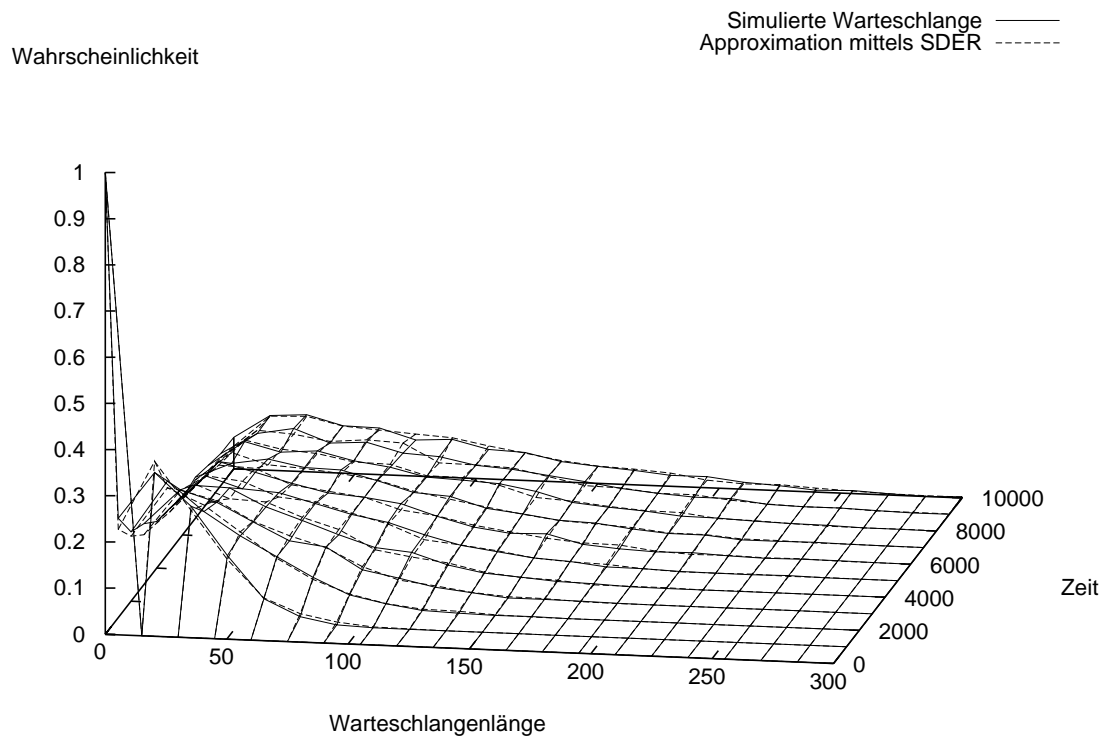


Abbildung 9.9: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

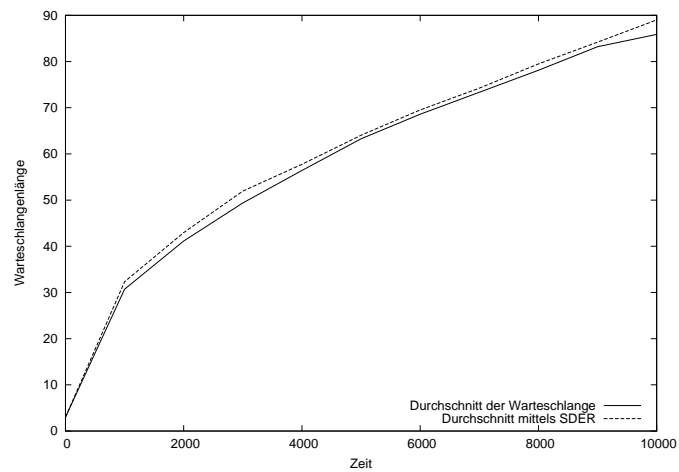


Abbildung 9.10: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

## Auslastung von 1,2

Zeitweise kann natürlich auch eine noch höhere Auslastung auftreten. Wir würden für eine klar überlastete Warteschlange einen noch geringeren Fehler erwarten, weil dann noch seltener Stillstand auftritt, und somit Ankunfts- und Bedienprozesse sich noch weniger gegenseitig beeinflussen. Deshalb betrachten wir nun ein Überlastfall mit  $\rho = 1, 2$ . Wegen technischer Beschränkungen haben wir hier nur 1000 Replikationen verwendet.

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0	0 - 149	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	150 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	300 - 449	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	450 - 599	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	600 - 749	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	750 - 899	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	900 - 1049	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	1050 - 1199	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	1200 - 1349	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	1350 - 1499	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	1500 - 1649	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	1650 - 1799	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	1800 - 1949	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	1950 - 2099	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	2100 - 2249	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	2250 - 2399	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	2400 - 2549	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	2550 - 2699	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	0 - 149	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	150 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	300 - 449	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	450 - 599	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	600 - 749	0,0100	[0,0038 ; 0,0162]	0,0150	[0,0075 ; 0,0225]	-0,0050	[-0,0147 ; 0,0047]
5000	750 - 899	0,1270	[0,1064 ; 0,1476]	0,1110	[0,0915 ; 0,1305]	0,0160	[-0,0124 ; 0,0444]
5000	900 - 1049	0,5310	[0,5001 ; 0,5619]	0,5000	[0,4690 ; 0,5310]	0,0310	[-0,0128 ; 0,0748]
5000	1050 - 1199	0,2980	[0,2697 ; 0,3263]	0,3170	[0,2882 ; 0,3458]	-0,0190	[-0,0594 ; 0,0214]
5000	1200 - 1349	0,0340	[0,0228 ; 0,0452]	0,0570	[0,0426 ; 0,0714]	-0,0230	[-0,0412 ; -0,0048]
5000	1350 - 1499	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	1500 - 1649	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	1650 - 1799	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	1800 - 1949	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	1950 - 2099	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	2100 - 2249	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	2250 - 2399	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	2400 - 2549	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	2550 - 2699	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	0 - 149	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	150 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	300 - 449	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	450 - 599	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	600 - 749	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	750 - 899	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	900 - 1049	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	1050 - 1199	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	1200 - 1349	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	1350 - 1499	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]	-0,0010	[-0,0030 ; 0,0010]
10000	1500 - 1649	0,0050	[0,0006 ; 0,0094]	0,0080	[0,0025 ; 0,0135]	-0,0030	[-0,0100 ; 0,0040]
10000	1650 - 1799	0,0590	[0,0444 ; 0,0736]	0,0740	[0,0578 ; 0,0902]	-0,0150	[-0,0368 ; 0,0068]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
10000	1800 - 1949	0,2620	[0,2347 ; 0,2893]	0,2410	[0,2145 ; 0,2675]	0,0210	[-0,0170 ; 0,0590]
10000	1950 - 2099	0,4140	[0,3835 ; 0,4445]	0,3710	[0,3411 ; 0,4009]	0,0430	[0,0002 ; 0,0858]
10000	2100 - 2249	0,2170	[0,1915 ; 0,2425]	0,2350	[0,2087 ; 0,2613]	-0,0180	[-0,0547 ; 0,0187]
10000	2250 - 2399	0,0420	[0,0296 ; 0,0544]	0,0630	[0,0479 ; 0,0781]	-0,0210	[-0,0405 ; -0,0015]
10000	2400 - 2549	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]	0,0060	[0,0012 ; 0,0108]	-0,0050	[-0,0102 ; 0,0002]
10000	2550 - 2699	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]	-0,0010	[-0,0030 ; 0,0010]

Tabelle 9.11: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 1.2$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
5000	1008,217	[1004,185 ; 1012,249]	1019,350	[1014,949 ; 1023,751]	-11,133	[-16,987 ; -5,279]
10000	2009,217	[2002,383 ; 2016,051]	2019,734	[2013,159 ; 2026,309]	-10,517	[-19,818 ; -1,217]

Tabelle 9.12: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 1.2$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Offenkundig sinkt der Fehler weiter, er bewegt sich nun für den Erwartungswert im Promillebereich. Beide Verteilungen sind sich sehr ähnlich, insbesondere für höhere  $t$ . Das ist nicht überraschend, da unsere Approximation unter anderem auf einer Vernachlässigung der Abhängigkeit des Ankunftsprozesses und Bedienprozesses beruht, welche mit steigender Auslastung immer geringer wird. Ein Blick auf die beiden Durchschnitte zeigt, wie gut die Approximation ist. Beide wachsen recht genau mit der linearen Rate  $\lambda - b\nu = 0,2$ .

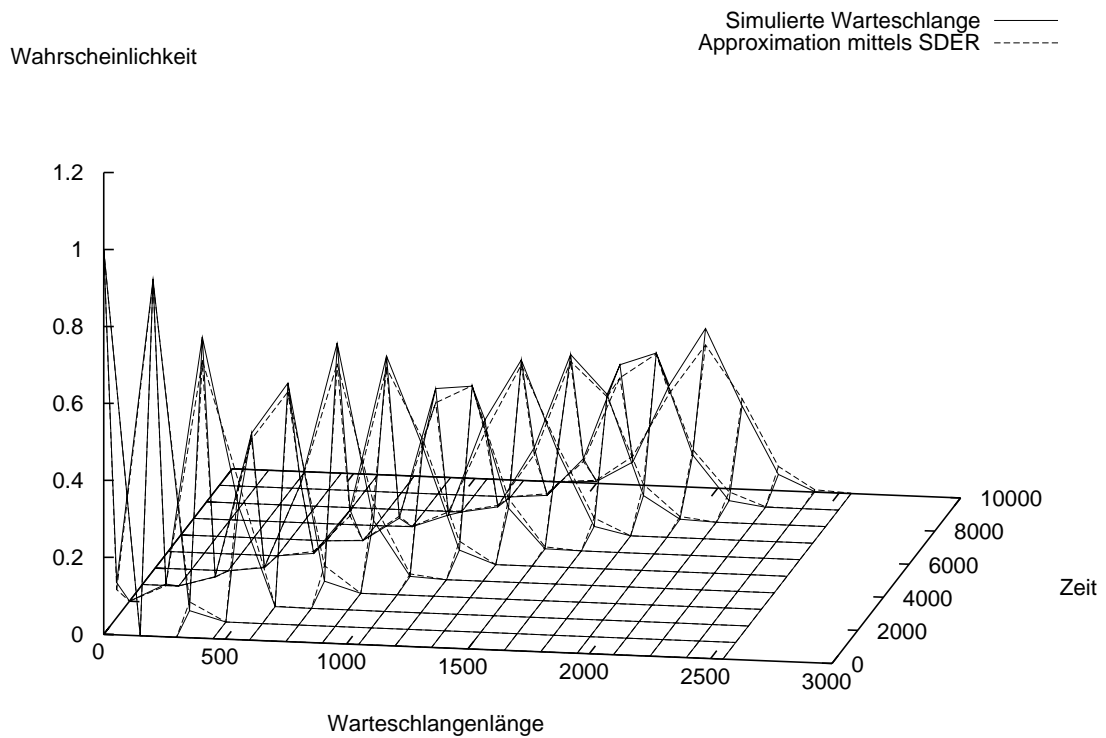


Abbildung 9.11: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 1.2$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

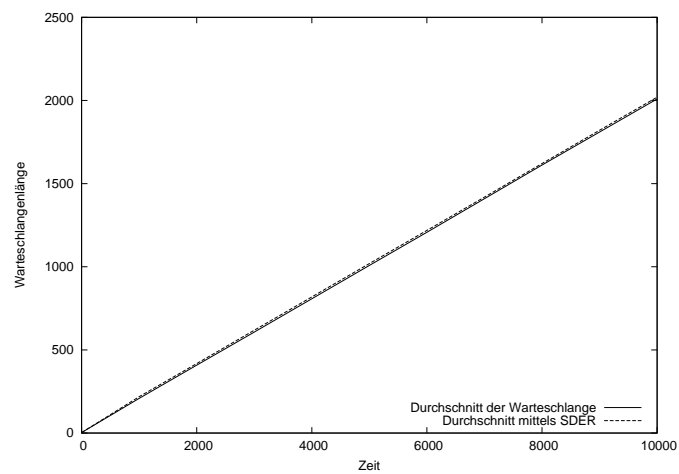


Abbildung 9.12: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 1.2$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

## 9.3 Effekte einer Varianzänderung

Bis jetzt haben wir untersucht, wie sich eine Änderung der Auslastung auf die Güte der Approximation auswirkt. Natürlich ist auch die Variabilität der Prozesse für das Verhalten einer Warteschlange ebenso entscheidend. Deshalb möchten wir nun untersuchen, wie sich Unterschiede in der Variabilität auf die Approximation auswirken.

### Quadrierter Variationskoeffizient von 2

Daher betrachten wir nun ein  $G/G/1(b,b)$ -System mit quadrierten Variationskoeffizienten von Zwischenankunfts- und Bedienzeiten von  $SCV(a) = SCV(s) = 2$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 4	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	5 - 9	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	10 - 14	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	15 - 19	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	20 - 24	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	25 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	30 - 34	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	35 - 39	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	40 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	45 - 49	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	50 - 54	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	55 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	60 - 64	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	65 - 69	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	70 - 74	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	75 - 79	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	80 - 84	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	85 - 89	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	0 - 4	0,0540	[0,0441 ; 0,0639]	0,0780	[0,0662 ; 0,0898]	-0,0240	[-0,0394 ; -0,0086]
1000,0	5 - 9	0,2060	[0,1883 ; 0,2237]	0,2415	[0,2227 ; 0,2603]	-0,0355	[-0,0613 ; -0,0097]
1000,0	10 - 14	0,1860	[0,1689 ; 0,2031]	0,1895	[0,1723 ; 0,2067]	-0,0035	[-0,0277 ; 0,0207]
1000,0	15 - 19	0,1555	[0,1396 ; 0,1714]	0,1475	[0,1320 ; 0,1630]	0,0080	[-0,0142 ; 0,0302]
1000,0	20 - 24	0,1155	[0,1015 ; 0,1295]	0,1095	[0,0958 ; 0,1232]	0,0060	[-0,0136 ; 0,0256]
1000,0	25 - 29	0,0810	[0,0690 ; 0,0930]	0,0780	[0,0662 ; 0,0898]	0,0030	[-0,0138 ; 0,0198]
1000,0	30 - 34	0,0625	[0,0519 ; 0,0731]	0,0475	[0,0382 ; 0,0568]	0,0150	[0,0009 ; 0,0291]
1000,0	35 - 39	0,0435	[0,0346 ; 0,0524]	0,0400	[0,0314 ; 0,0486]	0,0035	[-0,0089 ; 0,0159]
1000,0	40 - 44	0,0260	[0,0190 ; 0,0330]	0,0200	[0,0139 ; 0,0261]	0,0060	[-0,0033 ; 0,0153]
1000,0	45 - 49	0,0235	[0,0169 ; 0,0301]	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0095	[0,0011 ; 0,0179]
1000,0	50 - 54	0,0135	[0,0084 ; 0,0186]	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0040	[-0,0026 ; 0,0106]
1000,0	55 - 59	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	0,0115	[0,0068 ; 0,0162]	0,0015	[-0,0053 ; 0,0083]
1000,0	60 - 64	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0025	[-0,0024 ; 0,0074]
1000,0	65 - 69	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0035	[-0,0005 ; 0,0075]
1000,0	70 - 74	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	-0,0005	[-0,0031 ; 0,0021]
1000,0	75 - 79	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[-0,0024 ; 0,0024]
1000,0	80 - 84	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0021 ; 0,0031]
1000,0	85 - 89	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]
2000,0	0 - 4	0,0520	[0,0423 ; 0,0617]	0,0600	[0,0496 ; 0,0704]	-0,0080	[-0,0222 ; 0,0062]
2000,0	5 - 9	0,1875	[0,1704 ; 0,2046]	0,2540	[0,2349 ; 0,2731]	-0,0665	[-0,0921 ; -0,0409]
2000,0	10 - 14	0,1860	[0,1689 ; 0,2031]	0,2015	[0,1839 ; 0,2191]	-0,0155	[-0,0400 ; 0,0090]
2000,0	15 - 19	0,1445	[0,1291 ; 0,1599]	0,1195	[0,1053 ; 0,1337]	0,0250	[0,0040 ; 0,0460]
2000,0	20 - 24	0,1135	[0,0996 ; 0,1274]	0,1010	[0,0878 ; 0,1142]	0,0125	[-0,0067 ; 0,0317]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
2000,0	25 - 29	0,0855	[0,0732 ; 0,0978]	0,0670	[0,0560 ; 0,0780]	0,0185	[0,0021 ; 0,0349]
2000,0	30 - 34	0,0665	[0,0556 ; 0,0774]	0,0545	[0,0446 ; 0,0644]	0,0120	[-0,0028 ; 0,0268]
2000,0	35 - 39	0,0410	[0,0323 ; 0,0497]	0,0395	[0,0310 ; 0,0480]	0,0015	[-0,0107 ; 0,0137]
2000,0	40 - 44	0,0330	[0,0252 ; 0,0408]	0,0295	[0,0221 ; 0,0369]	0,0035	[-0,0073 ; 0,0143]
2000,0	45 - 49	0,0240	[0,0173 ; 0,0307]	0,0195	[0,0134 ; 0,0256]	0,0045	[-0,0045 ; 0,0135]
2000,0	50 - 54	0,0150	[0,0097 ; 0,0203]	0,0165	[0,0109 ; 0,0221]	-0,0015	[-0,0092 ; 0,0062]
2000,0	55 - 59	0,0160	[0,0105 ; 0,0215]	0,0090	[0,0049 ; 0,0131]	0,0070	[0,0001 ; 0,0139]
2000,0	60 - 64	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0055	[-0,0007 ; 0,0117]
2000,0	65 - 69	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0080	[0,0041 ; 0,0119]	-0,0040	[-0,0088 ; 0,0008]
2000,0	70 - 74	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0020	[-0,0030 ; 0,0070]
2000,0	75 - 79	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0020	[-0,0011 ; 0,0051]
2000,0	80 - 84	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0010	[-0,0024 ; 0,0044]
2000,0	85 - 89	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[-0,0024 ; 0,0024]

Tabelle 9.13: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 2$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
1000,0	19,728	[19,157 ; 20,300]	18,277	[17,810 ; 18,745]	1,451	[0,720 ; 2,183]
2000,0	21,338	[20,765 ; 21,911]	19,601	[19,087 ; 20,115]	1,737	[0,974 ; 2,500]

Tabelle 9.14: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 2$  und  $Q(0) = 3$

Im Vergleich zum Referenzmodell sieht die Approximation hier wesentlich besser aus. Insbesondere der Erwartungswert wird sehr gut getroffen. Also wirkt sich eine höhere Variabilität positiv auf die Güte der Approximation aus. Dies könnte man sich durch eine schnellere Konvergenz bei dem zu Grunde liegenden zentralen Grenzwertsatz erklären.

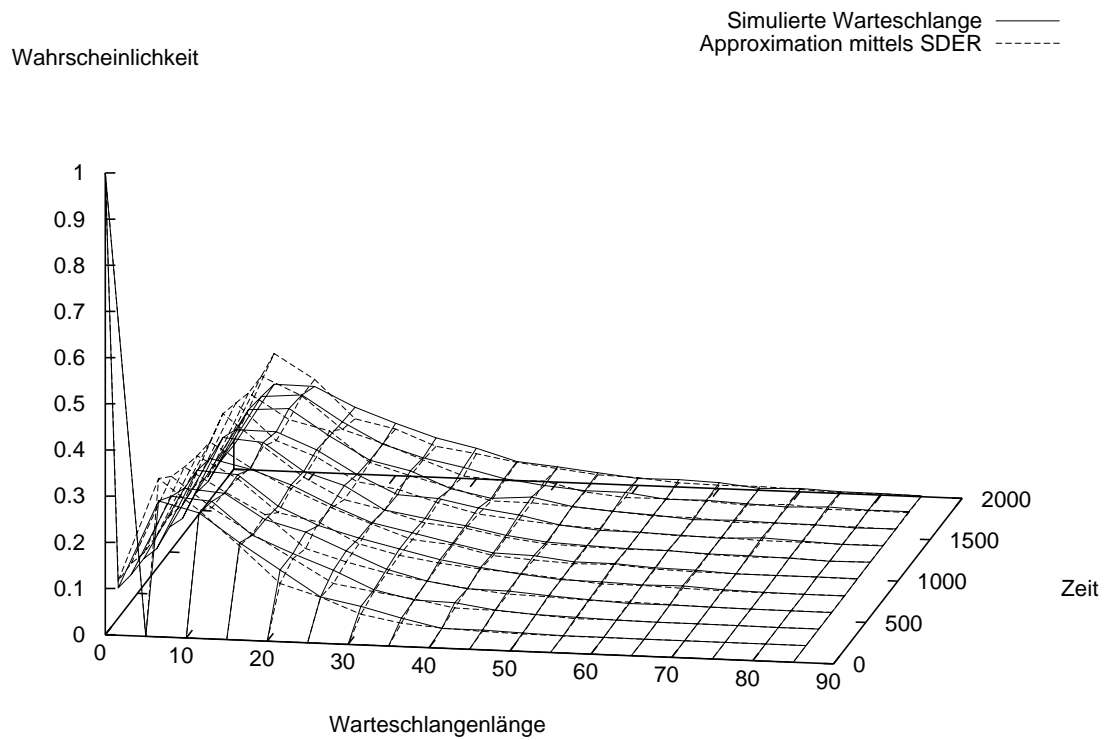


Abbildung 9.13: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 2$  und  $Q(0) = 3$

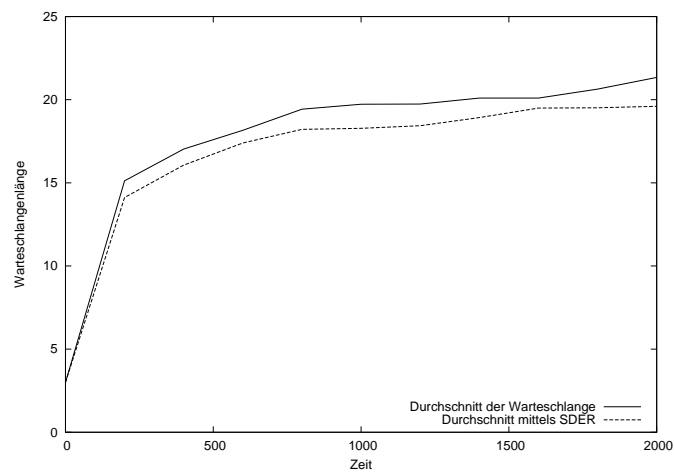


Abbildung 9.14: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 2$  und  $Q(0) = 3$



## Quadrierter Variationskoeffizient von 5

Wir betrachten nun eine noch höhere Variabilität des G/G/1(b,b)-Systems, indem wir  $SCV(a) = SCV(s) = 5$  wählen.

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0	0 - 14	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0	15 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	30 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	45 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	60 - 74	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	75 - 89	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	90 - 104	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	105 - 119	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	120 - 134	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	135 - 149	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	150 - 164	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	165 - 179	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	180 - 194	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	195 - 209	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	210 - 224	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	225 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1500	0 - 14	0,2685	[0,2491 ; 0,2879]	0,2890	[0,2691 ; 0,3089]	-0,0205	[-0,0483 ; 0,0073]
1500	15 - 29	0,2595	[0,2403 ; 0,2787]	0,2565	[0,2374 ; 0,2756]	0,0030	[-0,0241 ; 0,0301]
1500	30 - 44	0,1810	[0,1641 ; 0,1979]	0,1685	[0,1521 ; 0,1849]	0,0125	[-0,0110 ; 0,0360]
1500	45 - 59	0,1155	[0,1015 ; 0,1295]	0,1105	[0,0968 ; 0,1242]	0,0050	[-0,0146 ; 0,0246]
1500	60 - 74	0,0730	[0,0616 ; 0,0844]	0,0675	[0,0565 ; 0,0785]	0,0055	[-0,0103 ; 0,0213]
1500	75 - 89	0,0485	[0,0391 ; 0,0579]	0,0500	[0,0404 ; 0,0596]	-0,0015	[-0,0149 ; 0,0119]
1500	90 - 104	0,0235	[0,0169 ; 0,0301]	0,0225	[0,0160 ; 0,0290]	0,0010	[-0,0083 ; 0,0103]
1500	105 - 119	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	-0,0055	[-0,0130 ; 0,0020]
1500	120 - 134	0,0085	[0,0045 ; 0,0125]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0030	[-0,0022 ; 0,0082]
1500	135 - 149	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	-0,0015	[-0,0058 ; 0,0028]
1500	150 - 164	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0005	[-0,0035 ; 0,0045]
1500	165 - 179	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	-0,0020	[-0,0044 ; 0,0004]
1500	180 - 194	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1500	195 - 209	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1500	210 - 224	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
1500	225 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	-0,0005	[-0,0015 ; 0,0005]
1500	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
3000	0 - 14	0,2380	[0,2193 ; 0,2567]	0,2475	[0,2286 ; 0,2664]	-0,0095	[-0,0361 ; 0,0171]
3000	15 - 29	0,2405	[0,2218 ; 0,2592]	0,2460	[0,2271 ; 0,2649]	-0,0055	[-0,0321 ; 0,0211]
3000	30 - 44	0,1780	[0,1612 ; 0,1948]	0,1560	[0,1401 ; 0,1719]	0,0220	[-0,0011 ; 0,0451]
3000	45 - 59	0,1190	[0,1048 ; 0,1332]	0,1220	[0,1077 ; 0,1363]	-0,0030	[-0,0232 ; 0,0172]
3000	60 - 74	0,0830	[0,0709 ; 0,0951]	0,0920	[0,0793 ; 0,1047]	-0,0090	[-0,0265 ; 0,0085]
3000	75 - 89	0,0430	[0,0341 ; 0,0519]	0,0435	[0,0346 ; 0,0524]	-0,0005	[-0,0131 ; 0,0121]
3000	90 - 104	0,0430	[0,0341 ; 0,0519]	0,0260	[0,0190 ; 0,0330]	0,0170	[0,0057 ; 0,0283]
3000	105 - 119	0,0240	[0,0173 ; 0,0307]	0,0255	[0,0186 ; 0,0324]	-0,0015	[-0,0111 ; 0,0081]
3000	120 - 134	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	0,0135	[0,0084 ; 0,0186]	-0,0005	[-0,0076 ; 0,0066]
3000	135 - 149	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	-0,0015	[-0,0060 ; 0,0030]
3000	150 - 164	0,0070	[0,0033 ; 0,0107]	0,0100	[0,0056 ; 0,0144]	-0,0030	[-0,0087 ; 0,0027]
3000	165 - 179	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	-0,0020	[-0,0057 ; 0,0017]
3000	180 - 194	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	-0,0010	[-0,0044 ; 0,0024]
3000	195 - 209	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0015	[-0,0032 ; 0,0002]
3000	210 - 224	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]
3000	225 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	-0,0005	[-0,0015 ; 0,0005]
3000	240 - 254	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]

Tabelle 9.15: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$  und  $Q(0) = 3$

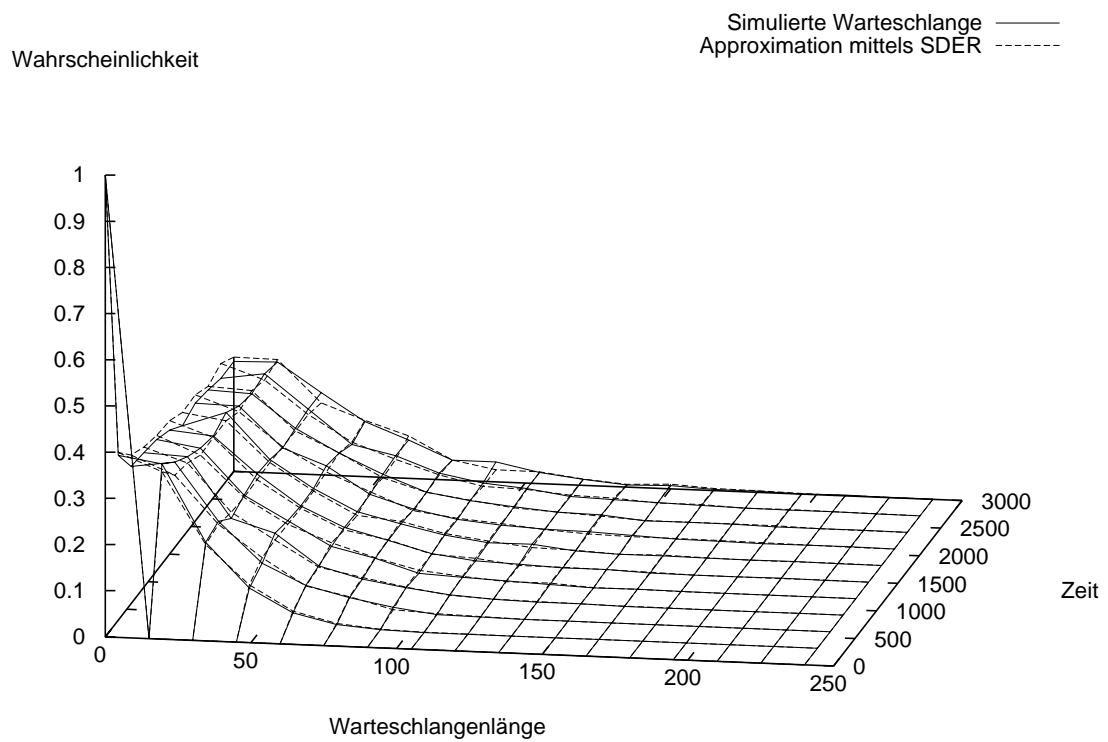


Abbildung 9.15: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$  und  $Q(0) = 3$

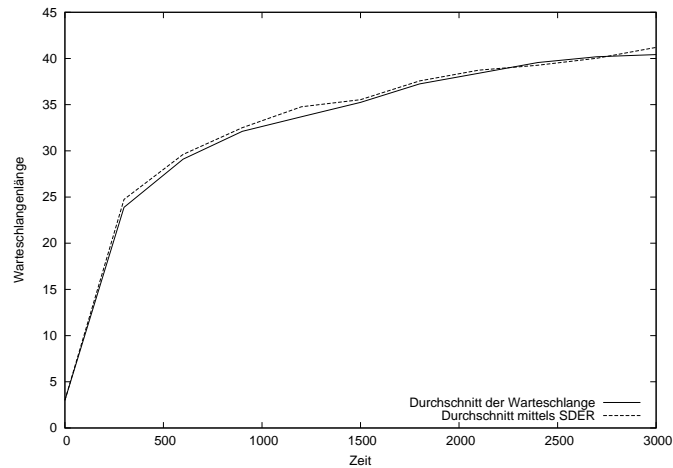


Abbildung 9.16: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
1500	35,245	[34,401 ; 36,089]	35,543	[34,592 ; 36,494]	-0,298	[-1,558 ; 0,962]
3000	40,418	[38,948 ; 41,888]	41,198	[39,772 ; 42,624]	-0,780	[-2,809 ; 1,249]

Tabelle 9.16: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$  und  $Q(0) = 3$

In diesem Beispiel hat sich die Approximation noch weiter verbessert, was sich in der geringen Differenz der Verteilungen in Abbildung 9.15 zeigt. Darüber hinaus hat sich auch die Differenz der Durchschnitte weiter verringert, wie man in Tabelle 9.16 sieht. Die Differenzen liegen weitgehend innerhalb der Konfidenzintervalle, sind also nicht von Zufallseffekten zu unterscheiden.

### Quadrierter Variationskoeffizient von 0,5

Nachdem wir gesehen haben, daß eine höhere Variabilität die Approximation verbessert, fragt sich, ob und wieviel sie durch eine niedrigere Variabilität schlechter wird. Wir verringern daher die quadrierten Variationskoeffizienten auf  $SCV(a) = SCV(s) = 0,5$ .

Zeit	Länge	Wahrschein- lichkeit der Simulation	Konfidenz- intervall des Niveaus 0,95	Wahrschein- lichkeit der SDER	Konfidenz- intervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrschein- lichkeiten	Konfidenz- intervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 1	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	2 - 3	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	4 - 5	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	6 - 7	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	8 - 9	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	10 - 11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12 - 13	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	14 - 15	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	16 - 17	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	18 - 19	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	20 - 21	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	22 - 23	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	24 - 25	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	26 - 27	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	28 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	30 - 31	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
250,0	0 - 1	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]
250,0	2 - 3	0,0200	[0,0139 ; 0,0261]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0125	[0,0053 ; 0,0197]
250,0	4 - 5	0,0945	[0,0817 ; 0,1073]	0,3165	[0,2961 ; 0,3369]	-0,2220	[-0,2461 ; -0,1979]
250,0	6 - 7	0,1995	[0,1820 ; 0,2170]	0,2850	[0,2652 ; 0,3048]	-0,0855	[-0,1119 ; -0,0591]
250,0	8 - 9	0,2430	[0,2242 ; 0,2618]	0,1625	[0,1463 ; 0,1787]	0,0805	[0,0557 ; 0,1053]
250,0	10 - 11	0,1725	[0,1559 ; 0,1891]	0,0965	[0,0836 ; 0,1094]	0,0760	[0,0550 ; 0,0970]
250,0	12 - 13	0,1115	[0,0977 ; 0,1253]	0,0605	[0,0501 ; 0,0709]	0,0510	[0,0337 ; 0,0683]
250,0	14 - 15	0,0700	[0,0588 ; 0,0812]	0,0345	[0,0265 ; 0,0425]	0,0355	[0,0218 ; 0,0492]
250,0	16 - 17	0,0380	[0,0296 ; 0,0464]	0,0185	[0,0126 ; 0,0244]	0,0195	[0,0092 ; 0,0298]
250,0	18 - 19	0,0190	[0,0130 ; 0,0250]	0,0090	[0,0049 ; 0,0131]	0,0100	[0,0027 ; 0,0173]
250,0	20 - 21	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0095	[0,0034 ; 0,0156]
250,0	22 - 23	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0045	[0,0007 ; 0,0083]
250,0	24 - 25	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0040	[0,0003 ; 0,0077]
250,0	26 - 27	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0017 ; 0,0027]
250,0	28 - 29	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[-0,0014 ; 0,0014]
250,0	30 - 31	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
500,0	0 - 1	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]
500,0	2 - 3	0,0160	[0,0105 ; 0,0215]	0,0090	[0,0049 ; 0,0131]	0,0070	[0,0001 ; 0,0139]
500,0	4 - 5	0,1045	[0,0911 ; 0,1179]	0,3265	[0,3059 ; 0,3471]	-0,2220	[-0,2465 ; -0,1975]
500,0	6 - 7	0,1985	[0,1810 ; 0,2160]	0,2930	[0,2731 ; 0,3129]	-0,0945	[-0,1210 ; -0,0680]
500,0	8 - 9	0,2280	[0,2096 ; 0,2464]	0,1570	[0,1411 ; 0,1729]	0,0710	[0,0467 ; 0,0953]
500,0	10 - 11	0,1740	[0,1574 ; 0,1906]	0,0815	[0,0695 ; 0,0935]	0,0925	[0,0720 ; 0,1130]
500,0	12 - 13	0,1055	[0,0920 ; 0,1190]	0,0520	[0,0423 ; 0,0617]	0,0535	[0,0369 ; 0,0701]
500,0	14 - 15	0,0700	[0,0588 ; 0,0812]	0,0395	[0,0310 ; 0,0480]	0,0305	[0,0164 ; 0,0446]
500,0	16 - 17	0,0440	[0,0350 ; 0,0530]	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0265	[0,0158 ; 0,0372]
500,0	18 - 19	0,0250	[0,0182 ; 0,0318]	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,0130	[0,0047 ; 0,0213]
500,0	20 - 21	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0070	[0,0033 ; 0,0107]	0,0070	[0,0007 ; 0,0133]
500,0	22 - 23	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0035	[-0,0005 ; 0,0075]
500,0	24 - 25	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0025	[-0,0010 ; 0,0060]
500,0	26 - 27	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0015	[-0,0007 ; 0,0037]
500,0	28 - 29	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]
500,0	30 - 31	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]

Tabelle 9.17: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
250,0	9,712	[9,550 ; 9,875]	8,130	[8,011 ; 8,249]	1,582	[1,383 ; 1,782]
500,0	9,853	[9,678 ; 10,028]	8,097	[7,966 ; 8,228]	1,756	[1,539 ; 1,973]

Tabelle 9.18: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$  und  $Q(0) = 3$

Leider wird hier die Approximation deutlich schlechter. Erneut ist die Lösung der SDER erheblich stärker zentriert. Trotzdem unterscheiden sich die Durchschnitte nur um ca. 18%, was für viele praktische Anwendungen ausreichen würde.

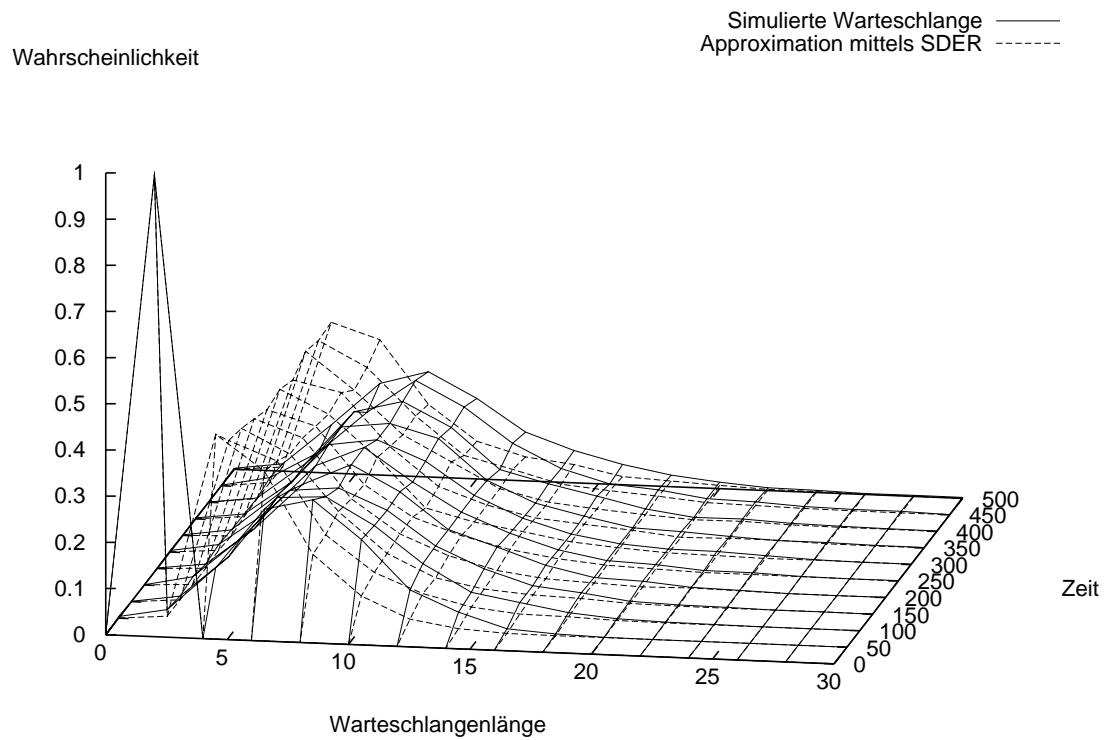


Abbildung 9.17: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$  und  $Q(0) = 3$

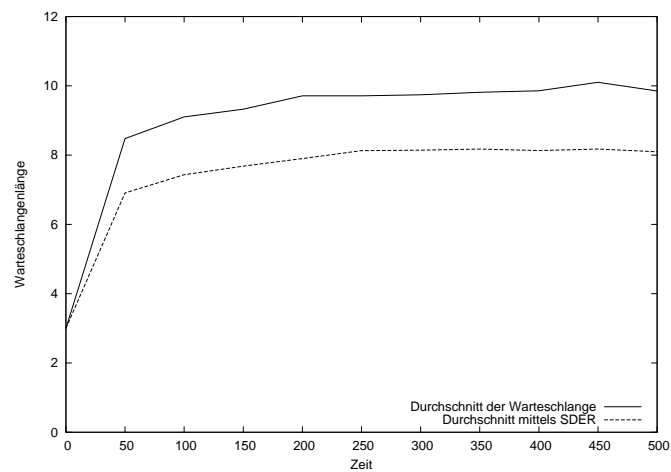


Abbildung 9.18: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$  und  $Q(0) = 3$

## Quadrierter Variationskoeffizient von 0,1

Wir möchten nun noch eine Warteschlange mit wirklich geringer Variabilität untersuchen, um zu sehen, wie brauchbar die Approximation dabei noch ist. Wir wählen dafür die quadrierten Variationskoeffizienten von  $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	1	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	3	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	4	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	5	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	6	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	7	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	8	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	9	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	10	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	13	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	14	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	15	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
250,0	0	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
250,0	1	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
250,0	2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
250,0	3	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]
250,0	4	0,0430	[0,0341 ; 0,0519]	0,2715	[0,2520 ; 0,2910]	-0,2285	[-0,2499 ; -0,2071]
250,0	5	0,1270	[0,1124 ; 0,1416]	0,5165	[0,4946 ; 0,5384]	-0,3895	[-0,4158 ; -0,3632]
250,0	6	0,1930	[0,1757 ; 0,2103]	0,1525	[0,1367 ; 0,1683]	0,0405	[0,0171 ; 0,0639]
250,0	7	0,1920	[0,1747 ; 0,2093]	0,0405	[0,0319 ; 0,0491]	0,1515	[0,1322 ; 0,1708]
250,0	8	0,1790	[0,1622 ; 0,1958]	0,0155	[0,0101 ; 0,0209]	0,1635	[0,1458 ; 0,1812]
250,0	9	0,1480	[0,1324 ; 0,1636]	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,1445	[0,1287 ; 0,1603]
250,0	10	0,0830	[0,0709 ; 0,0951]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0830	[0,0709 ; 0,0951]
250,0	11	0,0215	[0,0151 ; 0,0279]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0215	[0,0151 ; 0,0279]
250,0	12	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]
250,0	13	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]
250,0	14	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
250,0	15	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	1	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	3	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]
500,0	4	0,0475	[0,0382 ; 0,0568]	0,2475	[0,2286 ; 0,2664]	-0,2000	[-0,2211 ; -0,1789]
500,0	5	0,1215	[0,1072 ; 0,1358]	0,5365	[0,5146 ; 0,5584]	-0,4150	[-0,4411 ; -0,3889]
500,0	6	0,1575	[0,1415 ; 0,1735]	0,1580	[0,1420 ; 0,1740]	-0,0005	[-0,0231 ; 0,0221]
500,0	7	0,1960	[0,1786 ; 0,2134]	0,0435	[0,0346 ; 0,0524]	0,1525	[0,1329 ; 0,1721]
500,0	8	0,1895	[0,1723 ; 0,2067]	0,0125	[0,0076 ; 0,0174]	0,1770	[0,1591 ; 0,1949]
500,0	9	0,1745	[0,1579 ; 0,1911]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,1730	[0,1563 ; 0,1897]
500,0	10	0,0765	[0,0649 ; 0,0881]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0765	[0,0649 ; 0,0881]
500,0	11	0,0220	[0,0156 ; 0,0284]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0215	[0,0150 ; 0,0280]
500,0	12	0,0080	[0,0041 ; 0,0119]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0080	[0,0041 ; 0,0119]
500,0	13	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]
500,0	14	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
500,0	15	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]

Tabelle 9.19: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$  und  $Q(0) = 3$

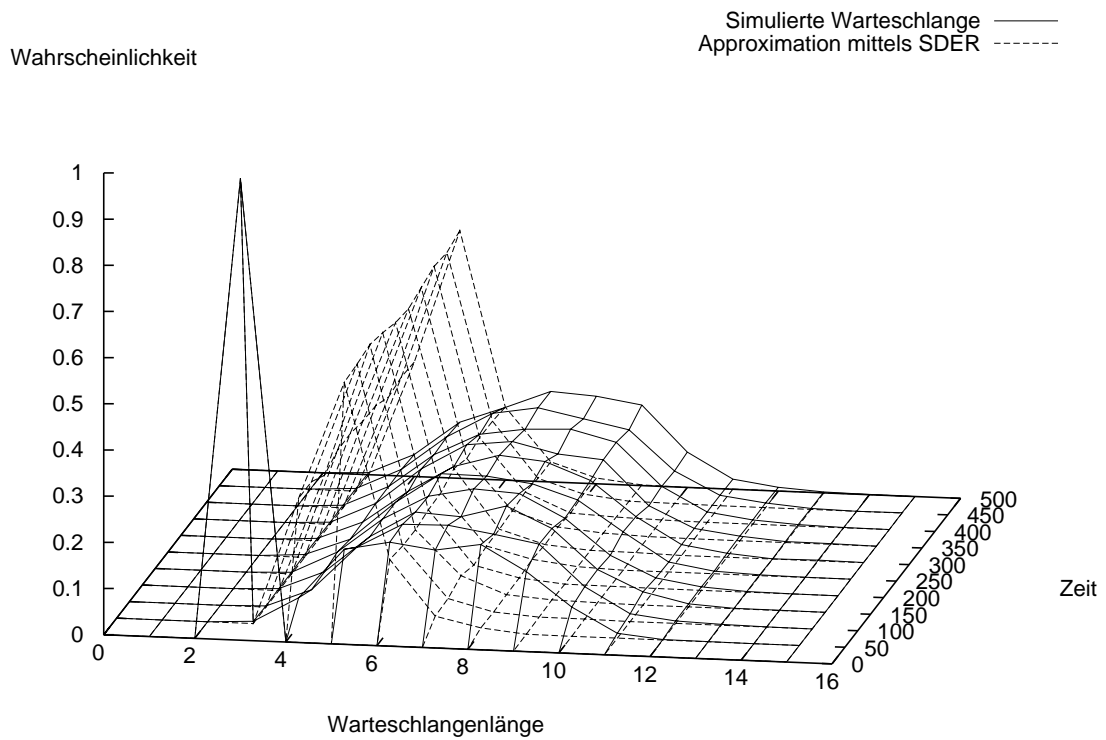


Abbildung 9.19: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$  und  $Q(0) = 3$

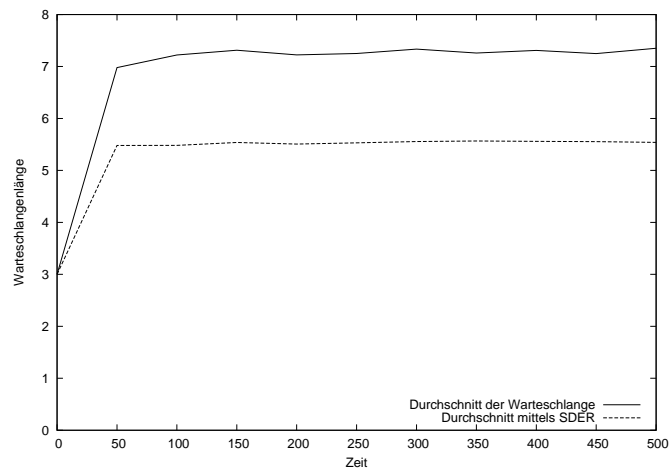


Abbildung 9.20: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
250,0	7,250	[7,177 ; 7,323]	5,532	[5,502 ; 5,561]	1,718	[1,640 ; 1,796]
500,0	7,350	[7,276 ; 7,425]	5,540	[5,506 ; 5,573]	1,811	[1,730 ; 1,892]

Tabelle 9.20: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$  und  $Q(0) = 3$

Bei dieser geringen Variabilität ist die Approximation kaum noch brauchbar. Die Verteilungen ähneln sich nicht mehr, die Lösung der stochastischen Differentialgleichung bewegt sich mit über 50% Wahrscheinlichkeit im Intervall  $[5; 6)$ . Die Durchschnitte unterscheiden sich um ca. 24%.

## 9.4 Effekte einer veränderten Bediengröße

Neben Auslastung und Variabilität bleibt noch die Größe der Bediengruppe als wesentlicher Faktor, der die Warteschlangenlänge beeinflusst. Wir möchten nun untersuchen, wie sich die Größe der Bediengruppen und damit die Gruppenbedienung generell auf die Approximation auswirkt. Dabei werden wir die Auslastung konstant halten, indem wir die Bedienrate entsprechend anpassen.

### Bediengröße von 1

Zuerst betrachten wir den Extremfall einer Warteschlange ohne Gruppenbedienung, d.h. mit  $b = 1$ . In diesem Fall sind die Approximationen nach (6.21) und (7.15) übrigens äquivalent.

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 4	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	5 - 9	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	10 - 14	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	15 - 19	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	20 - 24	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	25 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	30 - 34	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	35 - 39	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	40 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	45 - 49	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	50 - 54	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	55 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	60 - 64	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	65 - 69	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	70 - 74	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	75 - 79	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	80 - 84	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	85 - 89	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	90 - 94	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	95 - 99	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	100 - 104	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0 - 4	0,2700	[0,2505 ; 0,2895]	0,2770	[0,2574 ; 0,2966]	-0,0070	[-0,0346 ; 0,0206]
500,0	5 - 9	0,2060	[0,1883 ; 0,2237]	0,2250	[0,2067 ; 0,2433]	-0,0190	[-0,0445 ; 0,0065]
500,0	10 - 14	0,1505	[0,1348 ; 0,1662]	0,1585	[0,1425 ; 0,1745]	-0,0080	[-0,0304 ; 0,0144]



Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
500,0	15 - 19	0,1140	[0,1001 ; 0,1279]	0,1075	[0,0939 ; 0,1211]	0,0065	[-0,0129 ; 0,0259]
500,0	20 - 24	0,0765	[0,0649 ; 0,0881]	0,0755	[0,0639 ; 0,0871]	0,0010	[-0,0154 ; 0,0174]
500,0	25 - 29	0,0575	[0,0473 ; 0,0677]	0,0460	[0,0368 ; 0,0552]	0,0115	[-0,0022 ; 0,0252]
500,0	30 - 34	0,0465	[0,0373 ; 0,0557]	0,0475	[0,0382 ; 0,0568]	-0,0010	[-0,0141 ; 0,0121]
500,0	35 - 39	0,0280	[0,0208 ; 0,0352]	0,0235	[0,0169 ; 0,0301]	0,0045	[-0,0053 ; 0,0143]
500,0	40 - 44	0,0205	[0,0143 ; 0,0267]	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	0,0075	[-0,0005 ; 0,0155]
500,0	45 - 49	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0135	[0,0084 ; 0,0186]	-0,0040	[-0,0106 ; 0,0026]
500,0	50 - 54	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0035	[-0,0019 ; 0,0089]
500,0	55 - 59	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0005	[-0,0033 ; 0,0043]
500,0	60 - 64	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[-0,0031 ; 0,0031]
500,0	65 - 69	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0012 ; 0,0022]
500,0	70 - 74	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0015	[-0,0007 ; 0,0037]
500,0	75 - 79	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]
500,0	80 - 84	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
500,0	85 - 89	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	90 - 94	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	95 - 99	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	100 - 104	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	0 - 4	0,2680	[0,2486 ; 0,2874]	0,2525	[0,2335 ; 0,2715]	0,0155	[-0,0117 ; 0,0427]
1000,0	5 - 9	0,1850	[0,1680 ; 0,2020]	0,2040	[0,1863 ; 0,2217]	-0,0190	[-0,0435 ; 0,0055]
1000,0	10 - 14	0,1450	[0,1296 ; 0,1604]	0,1380	[0,1229 ; 0,1531]	0,0070	[-0,0146 ; 0,0286]
1000,0	15 - 19	0,1050	[0,0916 ; 0,1184]	0,1095	[0,0958 ; 0,1232]	-0,0045	[-0,0237 ; 0,0147]
1000,0	20 - 24	0,0770	[0,0653 ; 0,0887]	0,0830	[0,0709 ; 0,0951]	-0,0060	[-0,0228 ; 0,0108]
1000,0	25 - 29	0,0600	[0,0496 ; 0,0704]	0,0640	[0,0533 ; 0,0747]	-0,0040	[-0,0189 ; 0,0109]
1000,0	30 - 34	0,0425	[0,0337 ; 0,0513]	0,0480	[0,0386 ; 0,0574]	-0,0055	[-0,0184 ; 0,0074]
1000,0	35 - 39	0,0305	[0,0230 ; 0,0380]	0,0350	[0,0269 ; 0,0431]	-0,0045	[-0,0155 ; 0,0065]
1000,0	40 - 44	0,0240	[0,0173 ; 0,0307]	0,0150	[0,0097 ; 0,0203]	0,0090	[0,0004 ; 0,0176]
1000,0	45 - 49	0,0220	[0,0156 ; 0,0284]	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0080	[-0,0002 ; 0,0162]
1000,0	50 - 54	0,0135	[0,0084 ; 0,0186]	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0040	[-0,0026 ; 0,0106]
1000,0	55 - 59	0,0065	[0,0030 ; 0,0100]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0010	[-0,0038 ; 0,0058]
1000,0	60 - 64	0,0085	[0,0045 ; 0,0125]	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	-0,0010	[-0,0069 ; 0,0049]
1000,0	65 - 69	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	-0,0015	[-0,0058 ; 0,0028]
1000,0	70 - 74	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	-0,0015	[-0,0044 ; 0,0014]
1000,0	75 - 79	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	-0,0010	[-0,0041 ; 0,0021]
1000,0	80 - 84	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0017 ; 0,0027]
1000,0	85 - 89	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
1000,0	90 - 94	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]
1000,0	95 - 99	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	100 - 104	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]

Tabelle 9.21: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 1$ ,  $b = 1$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	13,877	[13,435 ; 14,319]	13,461	[13,022 ; 13,900]	0,416	[-0,201 ; 1,033]
1000,0	15,674	[15,166 ; 16,182]	15,829	[15,319 ; 16,339]	-0,155	[-0,868 ; 0,559]

Tabelle 9.22: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 1$ ,  $b = 1$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Im Vergleich zu dem Bediensystem in Abschnitt 9.1 sieht man, daß die Approximation für die minimal mögliche Bediengröße 1 besser aussieht, als für eine größere. Insbesondere die Approximation des Durchschnittes ist mit einem Fehler von unter 1% Prozent sehr genau.

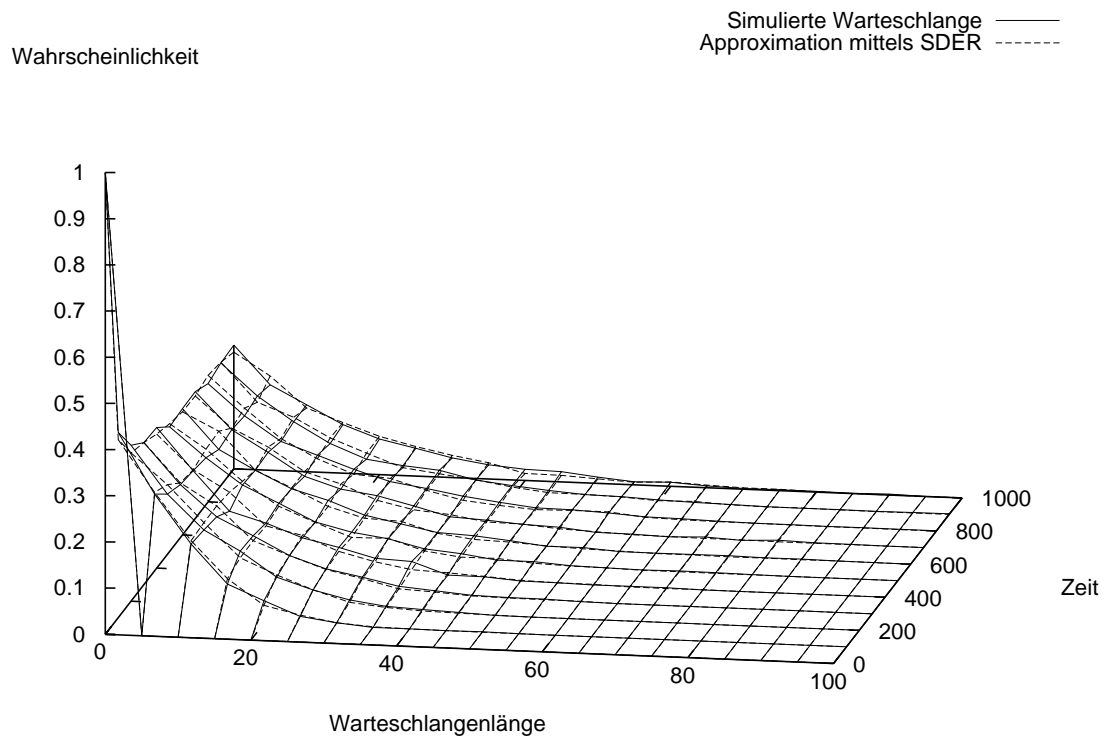


Abbildung 9.21: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 1$ ,  $b = 1$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

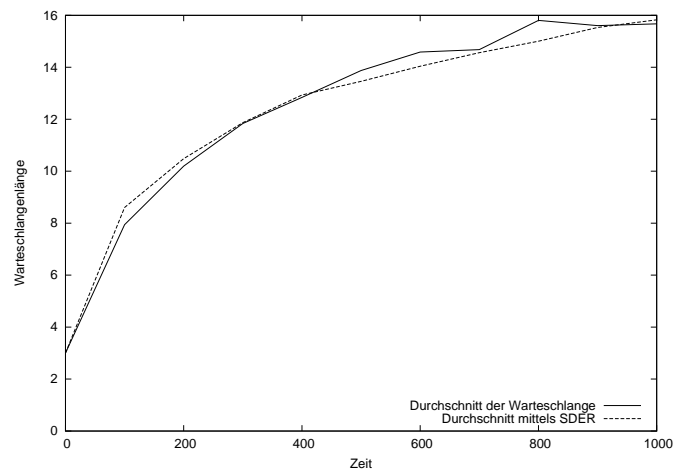


Abbildung 9.22: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 1$ ,  $b = 1$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Dies kann man damit erklären, daß die besonderen Effekte in dem Teil des Zustandsraumes unter und um die Bediengröße in dem Approximationsmodell immer noch nicht so treffend modelliert sind wie die Bewegung des Warteschlangenprozesses oberhalb dieser Schranke. Diese Verzerrung wird allerdings umso kleiner, je kleiner der betroffene Teil des Zustandsraumes ist. Da dieser eben  $[0, b)$  ist, nimmt der beschriebene Effekt mit kleinerem  $b$  ab.

### Bediengröße von 3

Nun betrachten wir eine G/G/1(b,b)-Warteschlange, bei der überhaupt Gruppenbedienung auftritt, das heißt mir  $b = 3$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	3 - 5	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	6 - 8	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	9 - 11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12 - 14	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	15 - 17	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	18 - 20	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	21 - 23	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	24 - 26	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	27 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	30 - 32	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	33 - 35	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	36 - 38	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	39 - 41	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	42 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	45 - 47	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	48 - 50	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	51 - 53	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	54 - 56	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	57 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	60 - 62	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0 - 2	0,0510	[0,0414 ; 0,0606]	0,0800	[0,0681 ; 0,0919]	-0,0290	[-0,0443 ; -0,0137]
500,0	3 - 5	0,2090	[0,1912 ; 0,2268]	0,2760	[0,2564 ; 0,2956]	-0,0670	[-0,0935 ; -0,0405]
500,0	6 - 8	0,2225	[0,2043 ; 0,2407]	0,2130	[0,1951 ; 0,2309]	0,0095	[-0,0161 ; 0,0351]
500,0	9 - 11	0,1540	[0,1382 ; 0,1698]	0,1490	[0,1334 ; 0,1646]	0,0050	[-0,0172 ; 0,0272]
500,0	12 - 14	0,1070	[0,0935 ; 0,1205]	0,0925	[0,0798 ; 0,1052]	0,0145	[-0,0041 ; 0,0331]
500,0	15 - 17	0,0810	[0,0690 ; 0,0930]	0,0590	[0,0487 ; 0,0693]	0,0220	[0,0062 ; 0,0378]
500,0	18 - 20	0,0510	[0,0414 ; 0,0606]	0,0495	[0,0400 ; 0,0590]	0,0015	[-0,0120 ; 0,0150]
500,0	21 - 23	0,0390	[0,0305 ; 0,0475]	0,0310	[0,0234 ; 0,0386]	0,0080	[-0,0034 ; 0,0194]
500,0	24 - 26	0,0305	[0,0230 ; 0,0380]	0,0215	[0,0151 ; 0,0279]	0,0090	[-0,0009 ; 0,0189]
500,0	27 - 29	0,0205	[0,0143 ; 0,0267]	0,0110	[0,0064 ; 0,0156]	0,0095	[0,0018 ; 0,0172]
500,0	30 - 32	0,0115	[0,0068 ; 0,0162]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0040	[-0,0020 ; 0,0100]
500,0	33 - 35	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0045	[0,0000 ; 0,0090]
500,0	36 - 38	0,0085	[0,0045 ; 0,0125]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0045	[-0,0004 ; 0,0094]
500,0	39 - 41	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]
500,0	42 - 44	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0021 ; 0,0031]
500,0	45 - 47	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]
500,0	48 - 50	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	-0,0005	[-0,0015 ; 0,0005]
500,0	51 - 53	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
500,0	54 - 56	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	57 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	60 - 62	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
1000,0	0 - 2	0,0465	[0,0373 ; 0,0557]	0,0870	[0,0746 ; 0,0994]	-0,0405	[-0,0559 ; -0,0251]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
1000,0	3 - 5	0,2065	[0,1888 ; 0,2242]	0,2690	[0,2496 ; 0,2884]	-0,0625	[-0,0888 ; -0,0362]
1000,0	6 - 8	0,2250	[0,2067 ; 0,2433]	0,2140	[0,1960 ; 0,2320]	0,0110	[-0,0147 ; 0,0367]
1000,0	9 - 11	0,1545	[0,1387 ; 0,1703]	0,1275	[0,1129 ; 0,1421]	0,0270	[0,0054 ; 0,0486]
1000,0	12 - 14	0,1035	[0,0902 ; 0,1168]	0,0980	[0,0850 ; 0,1110]	0,0055	[-0,0132 ; 0,0242]
1000,0	15 - 17	0,0735	[0,0621 ; 0,0849]	0,0630	[0,0524 ; 0,0736]	0,0105	[-0,0051 ; 0,0261]
1000,0	18 - 20	0,0515	[0,0418 ; 0,0612]	0,0440	[0,0350 ; 0,0530]	0,0075	[-0,0057 ; 0,0207]
1000,0	21 - 23	0,0375	[0,0292 ; 0,0458]	0,0290	[0,0216 ; 0,0364]	0,0085	[-0,0026 ; 0,0196]
1000,0	24 - 26	0,0330	[0,0252 ; 0,0408]	0,0150	[0,0097 ; 0,0203]	0,0180	[0,0085 ; 0,0275]
1000,0	27 - 29	0,0230	[0,0164 ; 0,0296]	0,0150	[0,0097 ; 0,0203]	0,0080	[-0,0005 ; 0,0165]
1000,0	30 - 32	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0125	[0,0076 ; 0,0174]	0,0020	[-0,0052 ; 0,0092]
1000,0	33 - 35	0,0100	[0,0056 ; 0,0144]	0,0105	[0,0060 ; 0,0150]	-0,0005	[-0,0067 ; 0,0057]
1000,0	36 - 38	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0000	[-0,0046 ; 0,0046]
1000,0	39 - 41	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0000	[-0,0039 ; 0,0039]
1000,0	42 - 44	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0035	[0,0003 ; 0,0067]
1000,0	45 - 47	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0017 ; 0,0027]
1000,0	48 - 50	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[-0,0024 ; 0,0024]
1000,0	51 - 53	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0017 ; 0,0027]
1000,0	54 - 56	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0010	[-0,0010 ; 0,0030]
1000,0	57 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	60 - 62	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[-0,0014 ; 0,0014]

Tabelle 9.23: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $b = 3$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	11,097	[10,767 ; 11,427]	9,895	[9,633 ; 10,157]	1,202	[0,785 ; 1,619]
1000,0	11,511	[11,142 ; 11,880]	10,395	[10,124 ; 10,665]	1,116	[0,663 ; 1,570]

Tabelle 9.24: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $b = 3$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Nicht überraschend bewegt sich die Qualität der Ergebnisse zwischen dem vorherigen Fall mit Bediengröße  $b = 1$  und dem in Abschnitt 9.1 mit  $b = 5$ . Die Approximation ist besser als jene, die in Abschnitt 9.1 erreicht wird, aber nicht so gut wie im vorigen Fall. Der Durchschnitt wird auch hier über die gesamte Zeit recht gut geschätzt.

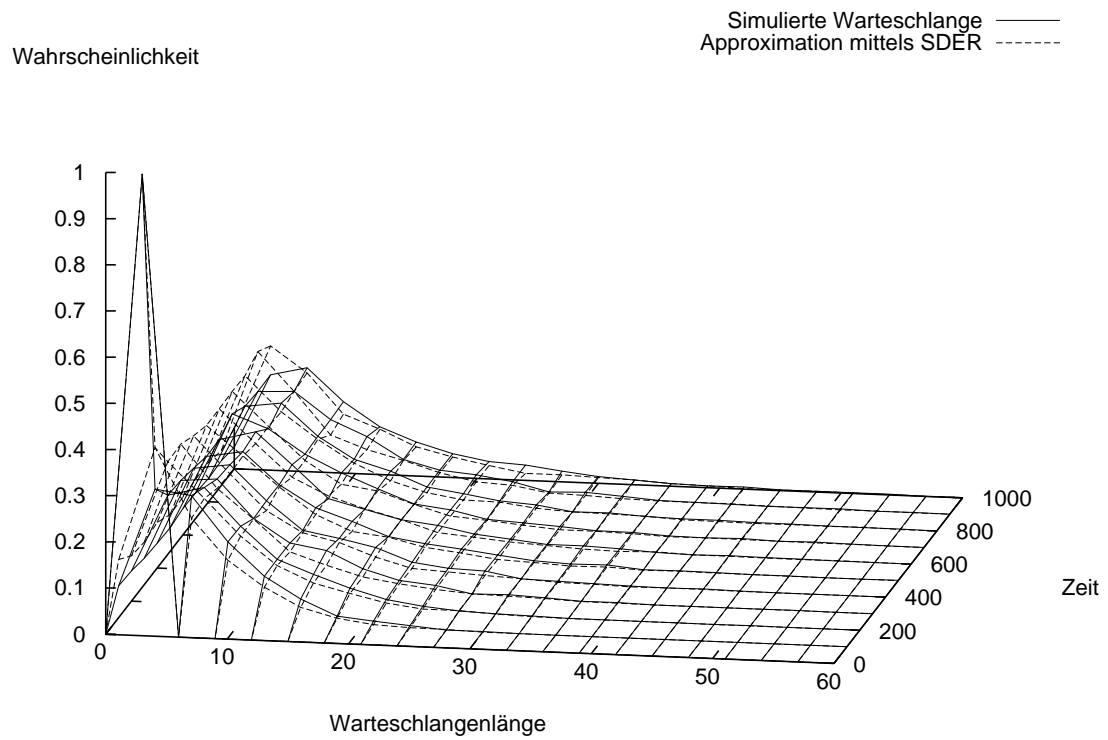


Abbildung 9.23: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $b = 3$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

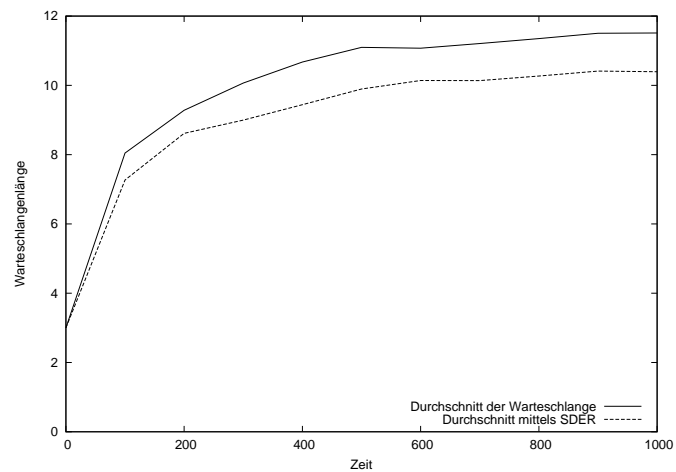


Abbildung 9.24: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $b = 3$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

## Bediengröße von 10

Nun betrachten wir eine G/G/1(b,b)-Warteschlange mit einer deutlich größeren Bediengröße von  $b = 10$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 3	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	4 - 7	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	8 - 11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12 - 15	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	16 - 19	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	20 - 23	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	24 - 27	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	28 - 31	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	32 - 35	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	36 - 39	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	40 - 43	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	44 - 47	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	48 - 51	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	52 - 55	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	56 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	60 - 63	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	64 - 67	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	68 - 71	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	72 - 75	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	76 - 79	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	80 - 83	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0 - 3	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	4 - 7	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0125	[0,0069 ; 0,0181]
500,0	8 - 11	0,1020	[0,0887 ; 0,1153]	0,3035	[0,2834 ; 0,3236]	-0,2015	[-0,2256 ; -0,1774]
500,0	12 - 15	0,2035	[0,1859 ; 0,2211]	0,2980	[0,2780 ; 0,3180]	-0,0945	[-0,1212 ; -0,0678]
500,0	16 - 19	0,2445	[0,2257 ; 0,2633]	0,1725	[0,1559 ; 0,1891]	0,0720	[0,0469 ; 0,0971]
500,0	20 - 23	0,1770	[0,1603 ; 0,1937]	0,1010	[0,0878 ; 0,1142]	0,0760	[0,0547 ; 0,0973]
500,0	24 - 27	0,1195	[0,1053 ; 0,1337]	0,0555	[0,0455 ; 0,0655]	0,0640	[0,0466 ; 0,0814]
500,0	28 - 31	0,0590	[0,0487 ; 0,0693]	0,0325	[0,0247 ; 0,0403]	0,0265	[0,0136 ; 0,0394]
500,0	32 - 35	0,0365	[0,0283 ; 0,0447]	0,0195	[0,0134 ; 0,0256]	0,0170	[0,0068 ; 0,0272]
500,0	36 - 39	0,0155	[0,0101 ; 0,0209]	0,0085	[0,0045 ; 0,0125]	0,0070	[0,0003 ; 0,0137]
500,0	40 - 43	0,0150	[0,0097 ; 0,0203]	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0105	[0,0044 ; 0,0166]
500,0	44 - 47	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0050	[0,0013 ; 0,0087]
500,0	48 - 51	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0025	[-0,0004 ; 0,0054]
500,0	52 - 55	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0020	[-0,0004 ; 0,0044]
500,0	56 - 59	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
500,0	60 - 63	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	64 - 67	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	68 - 71	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	72 - 75	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	76 - 79	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	80 - 83	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	0 - 3	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
1000,0	4 - 7	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0140	[0,0077 ; 0,0203]
1000,0	8 - 11	0,0935	[0,0807 ; 0,1063]	0,2700	[0,2505 ; 0,2895]	-0,1765	[-0,1998 ; -0,1532]
1000,0	12 - 15	0,2090	[0,1912 ; 0,2268]	0,2935	[0,2735 ; 0,3135]	-0,0845	[-0,1113 ; -0,0577]
1000,0	16 - 19	0,2495	[0,2305 ; 0,2685]	0,1770	[0,1603 ; 0,1937]	0,0725	[0,0472 ; 0,0978]
1000,0	20 - 23	0,1745	[0,1579 ; 0,1911]	0,1030	[0,0897 ; 0,1163]	0,0715	[0,0502 ; 0,0928]
1000,0	24 - 27	0,0960	[0,0831 ; 0,1089]	0,0610	[0,0505 ; 0,0715]	0,0350	[0,0184 ; 0,0516]
1000,0	28 - 31	0,0675	[0,0565 ; 0,0785]	0,0420	[0,0332 ; 0,0508]	0,0255	[0,0114 ; 0,0396]
1000,0	32 - 35	0,0385	[0,0301 ; 0,0469]	0,0240	[0,0173 ; 0,0307]	0,0145	[0,0037 ; 0,0253]
1000,0	36 - 39	0,0215	[0,0151 ; 0,0279]	0,0115	[0,0068 ; 0,0162]	0,0100	[0,0021 ; 0,0179]
1000,0	40 - 43	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0045	[-0,0016 ; 0,0106]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
1000,0	44 - 47	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0035	[-0,0012 ; 0,0082]
1000,0	48 - 51	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0030	[-0,0007 ; 0,0067]
1000,0	52 - 55	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]
1000,0	56 - 59	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0025	[-0,0001 ; 0,0051]
1000,0	60 - 63	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[-0,0014 ; 0,0014]
1000,0	64 - 67	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
1000,0	68 - 71	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	72 - 75	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	76 - 79	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	80 - 83	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]

Tabelle 9.25: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{10}$ ,  $b = 10$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	19,758	[19,492 ; 20,025]	16,288	[16,027 ; 16,549]	3,470	[3,101 ; 3,840]
1000,0	19,896	[19,543 ; 20,250]	17,042	[16,778 ; 17,305]	2,855	[2,418 ; 3,292]

Tabelle 9.26: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{10}$ ,  $b = 10$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

An diesem Beispiel sehen wir, daß die Approximation bei größeren Bediengrößen nicht so gut funktioniert wie bei kleineren. Die Verteilung des Lösungsprozesses der reflektierten stochastischen Differentialgleichung ist wesentlich stärker zentriert, und sie ist es auch nicht dort, wo es die Verteilung des simulierten Warteschlangenprozesses ist, sondern bei deutlich niedrigeren Werten. Deshalb wird der Durchschnitt durchgehend um ungefähr 15% unterschätzt.

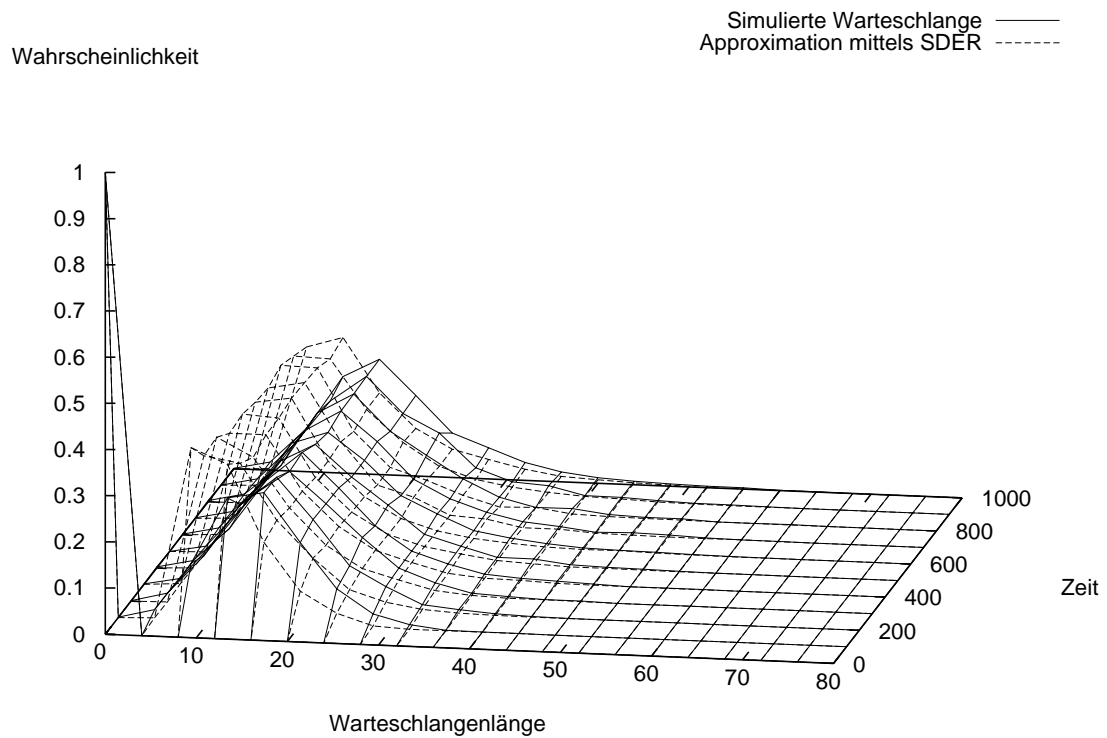


Abbildung 9.25: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{10}$ ,  $b = 10$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$

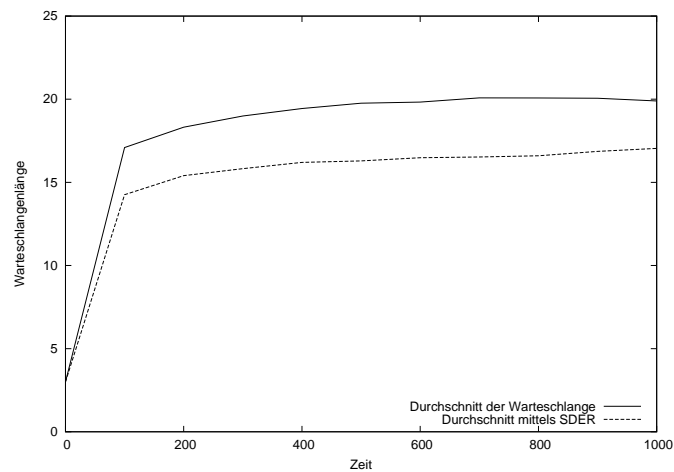


Abbildung 9.26: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = \frac{1}{10}$ ,  $b = 10$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$  und  $Q(0) = 3$



## 9.5 Approximation ohne Mindestbediengröße

Es bleibt noch die Approximation für das G/G/1(1,b)-System numerisch zu bewerten. Zu diesem Zweck approximieren und simulieren wir noch einige Warteschlangensysteme ohne Mindestbediengröße.

### Vergleich zum Referenzmodell

Zunächst betrachten wir das System mit den gleichen Parametern wie das Referenzmodell in Abschnitt 9.1, allerdings ohne Mindestbediengröße.

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDR	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0 - 2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	3 - 5	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	6 - 8	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	9 - 11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12 - 14	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	15 - 17	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	18 - 20	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	21 - 23	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	24 - 26	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	27 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	30 - 32	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	33 - 35	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	36 - 38	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	39 - 41	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	42 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	45 - 47	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	48 - 50	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0 - 2	0,0110	[0,0064 ; 0,0156]	0,0395	[0,0310 ; 0,0480]	-0,0285	[-0,0382 ; -0,0188]
500,0	3 - 5	0,0765	[0,0649 ; 0,0881]	0,2705	[0,2510 ; 0,2900]	-0,1940	[-0,2167 ; -0,1713]
500,0	6 - 8	0,1850	[0,1680 ; 0,2020]	0,2315	[0,2130 ; 0,2500]	-0,0465	[-0,0716 ; -0,0214]
500,0	9 - 11	0,1965	[0,1791 ; 0,2139]	0,1665	[0,1502 ; 0,1828]	0,0300	[0,0061 ; 0,0539]
500,0	12 - 14	0,1720	[0,1555 ; 0,1885]	0,0970	[0,0840 ; 0,1100]	0,0750	[0,0540 ; 0,0960]
500,0	15 - 17	0,1195	[0,1053 ; 0,1337]	0,0650	[0,0542 ; 0,0758]	0,0545	[0,0366 ; 0,0724]
500,0	18 - 20	0,0895	[0,0770 ; 0,1020]	0,0535	[0,0436 ; 0,0634]	0,0360	[0,0201 ; 0,0519]
500,0	21 - 23	0,0535	[0,0436 ; 0,0634]	0,0290	[0,0216 ; 0,0364]	0,0245	[0,0122 ; 0,0368]
500,0	24 - 26	0,0325	[0,0247 ; 0,0403]	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0150	[0,0053 ; 0,0247]
500,0	27 - 29	0,0210	[0,0147 ; 0,0273]	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,0090	[0,0011 ; 0,0169]
500,0	30 - 32	0,0165	[0,0109 ; 0,0221]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0135	[0,0074 ; 0,0196]
500,0	33 - 35	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0035	[-0,0019 ; 0,0089]
500,0	36 - 38	0,0065	[0,0030 ; 0,0100]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	0,0005	[-0,0044 ; 0,0054]
500,0	39 - 41	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0030	[-0,0001 ; 0,0061]
500,0	42 - 44	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0015	[-0,0011 ; 0,0041]
500,0	45 - 47	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0015	[-0,0007 ; 0,0037]
500,0	48 - 50	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[-0,0014 ; 0,0014]
1000,0	0 - 2	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0405	[0,0319 ; 0,0491]	-0,0355	[-0,0447 ; -0,0263]
1000,0	3 - 5	0,0770	[0,0653 ; 0,0887]	0,2545	[0,2354 ; 0,2736]	-0,1775	[-0,1999 ; -0,1551]
1000,0	6 - 8	0,1700	[0,1535 ; 0,1865]	0,2380	[0,2193 ; 0,2567]	-0,0680	[-0,0929 ; -0,0431]
1000,0	9 - 11	0,2105	[0,1926 ; 0,2284]	0,1520	[0,1363 ; 0,1677]	0,0585	[0,0347 ; 0,0823]
1000,0	12 - 14	0,1655	[0,1492 ; 0,1818]	0,0920	[0,0793 ; 0,1047]	0,0735	[0,0529 ; 0,0941]
1000,0	15 - 17	0,1205	[0,1062 ; 0,1348]	0,0750	[0,0635 ; 0,0865]	0,0455	[0,0271 ; 0,0639]
1000,0	18 - 20	0,0810	[0,0690 ; 0,0930]	0,0455	[0,0364 ; 0,0546]	0,0355	[0,0205 ; 0,0505]
1000,0	21 - 23	0,0495	[0,0400 ; 0,0590]	0,0345	[0,0265 ; 0,0425]	0,0150	[0,0026 ; 0,0274]
1000,0	24 - 26	0,0390	[0,0305 ; 0,0475]	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0215	[0,0113 ; 0,0317]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
1000,0	27 - 29	0,0285	[0,0212 ; 0,0358]	0,0210	[0,0147 ; 0,0273]	0,0075	[-0,0021 ; 0,0171]
1000,0	30 - 32	0,0175	[0,0118 ; 0,0232]	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,0055	[-0,0020 ; 0,0130]
1000,0	33 - 35	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0070	[0,0005 ; 0,0135]
1000,0	36 - 38	0,0065	[0,0030 ; 0,0100]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0035	[-0,0008 ; 0,0078]
1000,0	39 - 41	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	0,0025	[-0,0015 ; 0,0065]
1000,0	42 - 44	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0030	[-0,0004 ; 0,0064]
1000,0	45 - 47	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[-0,0024 ; 0,0024]
1000,0	48 - 50	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]

Tabelle 9.27: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und  $(1,b)$ -Bedienregel

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	13,539	[13,293 ; 13,785]	10,265	[10,018 ; 10,511]	3,274	[2,929 ; 3,619]
1000,0	14,030	[13,795 ; 14,266]	10,826	[10,533 ; 11,120]	3,204	[2,831 ; 3,577]

Tabelle 9.28: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und  $(1,b)$ -Bedienregel

Überraschenderweise ist diese Warteschlange, bei einer  $(1, b)$ -Bedienung im Durchschnitt nicht kürzer als bei fester Bediengröße  $b$ . Im Gegenteil, in diesem Beispiel ist die  $G/G/1(1,b)$ -Warteschlange im Durchschnitt sogar etwas länger als die  $G/G/1(b,b)$ -Warteschlange, allerdings liegt die Differenz noch innerhalb des Konfidenzintervalls und ist somit nicht signifikant.

Die Approximation bildet die  $(1, b)$ -Bedienung deutlich schlechter ab, sie unterschätzt die Warteschlangenlänge um ca. 23%. Ähnlich wie bei der Approximation des Referenzmodells mit  $(b, b)$ -Bedienung ist die Verteilung der Lösung der SDER stärker zentriert, als die des approximierten Warteschlangenprozesses. Nur werden bei der Lösung der SDER wahrscheinlicher niedrigere Werte angenommen, so daß insgesamt die Approximation wesentlich zu gering ausfällt.

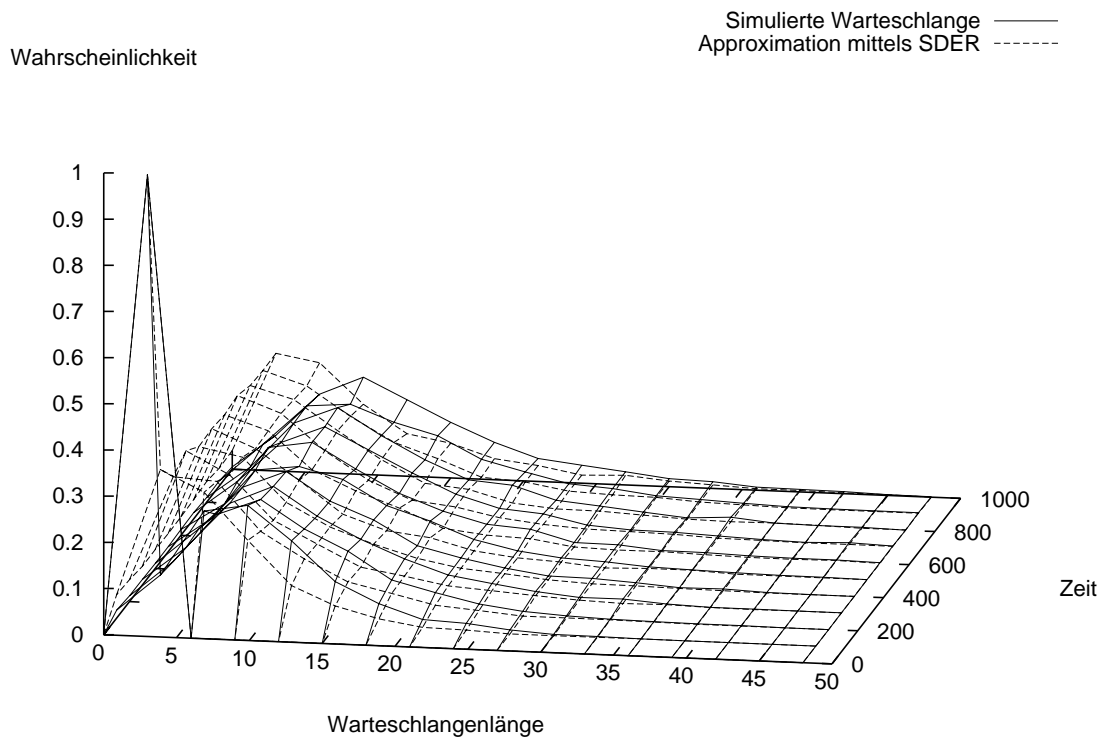


Abbildung 9.27: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

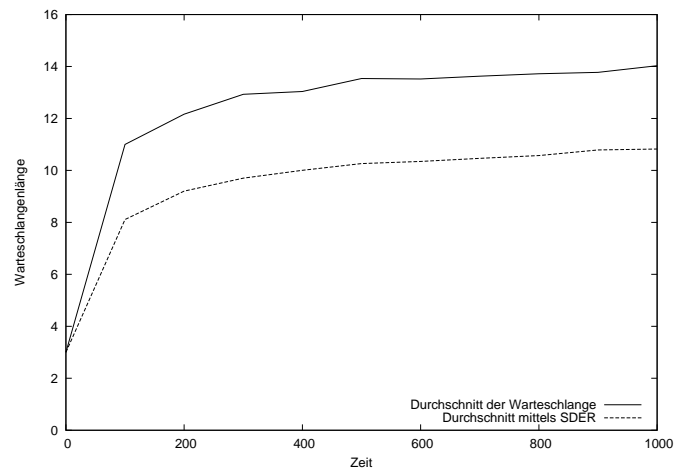


Abbildung 9.28: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

## Approximation der G/G/1(1,b)-Warteschlange bei höherer Auslastung

Anhand der numerischen Ergebnisse zur Diffusionsapproximation der G/G/1(b,b)-Warteschlange hat sich herausgestellt, daß die Güte mit wachsender Auslastung zunimmt. Wir interessieren uns deshalb dafür, ob die Approximation ohne Mindestbediengröße bei höherer Auslastung auch bessere Ergebnisse liefert.

Dafür untersuchen wir nun das Warteschlangensystem mit Auslastung  $\rho = 1$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0	0 - 14	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0	15 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	30 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	45 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	60 - 74	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	75 - 89	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	90 - 104	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	105 - 119	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	120 - 134	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	135 - 149	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	150 - 164	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	165 - 179	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	180 - 194	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	195 - 209	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	210 - 224	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	225 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	255 - 269	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	270 - 284	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	285 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	300 - 314	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	0 - 14	0,0970	[0,0840 ; 0,1100]	0,1170	[0,1029 ; 0,1311]	-0,0200	[-0,0391 ; -0,0009]
5000	15 - 29	0,1505	[0,1348 ; 0,1662]	0,1560	[0,1401 ; 0,1719]	-0,0055	[-0,0278 ; 0,0168]
5000	30 - 44	0,1450	[0,1296 ; 0,1604]	0,1490	[0,1334 ; 0,1646]	-0,0040	[-0,0259 ; 0,0179]
5000	45 - 59	0,1430	[0,1277 ; 0,1583]	0,1390	[0,1238 ; 0,1542]	0,0040	[-0,0176 ; 0,0256]
5000	60 - 74	0,1205	[0,1062 ; 0,1348]	0,1035	[0,0902 ; 0,1168]	0,0170	[-0,0025 ; 0,0365]
5000	75 - 89	0,0940	[0,0812 ; 0,1068]	0,0965	[0,0836 ; 0,1094]	-0,0025	[-0,0207 ; 0,0157]
5000	90 - 104	0,0840	[0,0718 ; 0,0962]	0,0700	[0,0588 ; 0,0812]	0,0140	[-0,0025 ; 0,0305]
5000	105 - 119	0,0500	[0,0404 ; 0,0596]	0,0540	[0,0441 ; 0,0639]	-0,0040	[-0,0178 ; 0,0098]
5000	120 - 134	0,0420	[0,0332 ; 0,0508]	0,0355	[0,0274 ; 0,0436]	0,0065	[-0,0055 ; 0,0185]
5000	135 - 149	0,0300	[0,0225 ; 0,0375]	0,0300	[0,0225 ; 0,0375]	0,0000	[-0,0106 ; 0,0106]
5000	150 - 164	0,0200	[0,0139 ; 0,0261]	0,0195	[0,0134 ; 0,0256]	0,0005	[-0,0081 ; 0,0091]
5000	165 - 179	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	0,0160	[0,0105 ; 0,0215]	-0,0040	[-0,0113 ; 0,0033]
5000	180 - 194	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0065	[0,0030 ; 0,0100]	-0,0015	[-0,0062 ; 0,0032]
5000	195 - 209	0,0035	[0,0009 ; 0,0061]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0010	[-0,0024 ; 0,0044]
5000	210 - 224	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0030	[0,0006 ; 0,0054]	-0,0010	[-0,0041 ; 0,0021]
5000	225 - 239	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0010	[-0,0030 ; 0,0010]
5000	240 - 254	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[-0,0014 ; 0,0014]
5000	255 - 269	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
5000	270 - 284	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	285 - 299	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
5000	300 - 314	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
10000	0 - 14	0,0615	[0,0510 ; 0,0720]	0,0860	[0,0737 ; 0,0983]	-0,0245	[-0,0407 ; -0,0083]
10000	15 - 29	0,1190	[0,1048 ; 0,1332]	0,1155	[0,1015 ; 0,1295]	0,0035	[-0,0164 ; 0,0234]
10000	30 - 44	0,1105	[0,0968 ; 0,1242]	0,1095	[0,0958 ; 0,1232]	0,0010	[-0,0184 ; 0,0204]
10000	45 - 59	0,1170	[0,1029 ; 0,1311]	0,1165	[0,1024 ; 0,1306]	0,0005	[-0,0194 ; 0,0204]
10000	60 - 74	0,0890	[0,0765 ; 0,1015]	0,1015	[0,0883 ; 0,1147]	-0,0125	[-0,0307 ; 0,0057]
10000	75 - 89	0,0845	[0,0723 ; 0,0967]	0,0785	[0,0667 ; 0,0903]	0,0060	[-0,0110 ; 0,0230]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
10000	90 - 104	0,0885	[0,0761 ; 0,1009]	0,0735	[0,0621 ; 0,0849]	0,0150	[-0,0019 ; 0,0319]
10000	105 - 119	0,0685	[0,0574 ; 0,0796]	0,0625	[0,0519 ; 0,0731]	0,0060	[-0,0093 ; 0,0213]
10000	120 - 134	0,0560	[0,0459 ; 0,0661]	0,0555	[0,0455 ; 0,0655]	0,0005	[-0,0137 ; 0,0147]
10000	135 - 149	0,0495	[0,0400 ; 0,0590]	0,0495	[0,0400 ; 0,0590]	0,0000	[-0,0134 ; 0,0134]
10000	150 - 164	0,0410	[0,0323 ; 0,0497]	0,0370	[0,0287 ; 0,0453]	0,0040	[-0,0080 ; 0,0160]
10000	165 - 179	0,0310	[0,0234 ; 0,0386]	0,0290	[0,0216 ; 0,0364]	0,0020	[-0,0086 ; 0,0126]
10000	180 - 194	0,0230	[0,0164 ; 0,0296]	0,0250	[0,0182 ; 0,0318]	-0,0020	[-0,0115 ; 0,0075]
10000	195 - 209	0,0220	[0,0156 ; 0,0284]	0,0145	[0,0093 ; 0,0197]	0,0075	[-0,0008 ; 0,0158]
10000	210 - 224	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0125	[0,0076 ; 0,0174]	0,0015	[-0,0056 ; 0,0086]
10000	225 - 239	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0120	[0,0072 ; 0,0168]	-0,0025	[-0,0089 ; 0,0039]
10000	240 - 254	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	-0,0030	[-0,0078 ; 0,0018]
10000	255 - 269	0,0050	[0,0019 ; 0,0081]	0,0045	[0,0016 ; 0,0074]	0,0005	[-0,0038 ; 0,0048]
10000	270 - 284	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	-0,0015	[-0,0050 ; 0,0020]
10000	285 - 299	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0015	[-0,0007 ; 0,0037]
10000	300 - 314	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	-0,0015	[-0,0032 ; 0,0002]

Tabelle 9.29: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
5000	63,648	[61,997 ; 65,300]	62,658	[61,126 ; 64,190]	0,990	[-1,241 ; 3,222]
10000	86,466	[84,697 ; 88,236]	85,049	[82,309 ; 87,789]	1,418	[-1,818 ; 4,654]

Tabelle 9.30: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

Es zeigt sich, daß diese Variante der Diffusionsapproximation bei hoher Auslastung bemerkenswert genau ist. Der Durchschnitt wird über den gesamten Zeitraum bis auf ca. 1,6% genau getroffen. Darüber hinaus wird auch die gesamte Verteilung über den kompletten Zeitraum gut approximiert. Allerdings wird dieses erheblich bessere Ergebnis wohl gerade deshalb erreicht, weil sich der Warteschlangenprozeß durch die hohe Auslastung seltener in dem kritischen Bereich unterhalb von  $b$  aufhält.

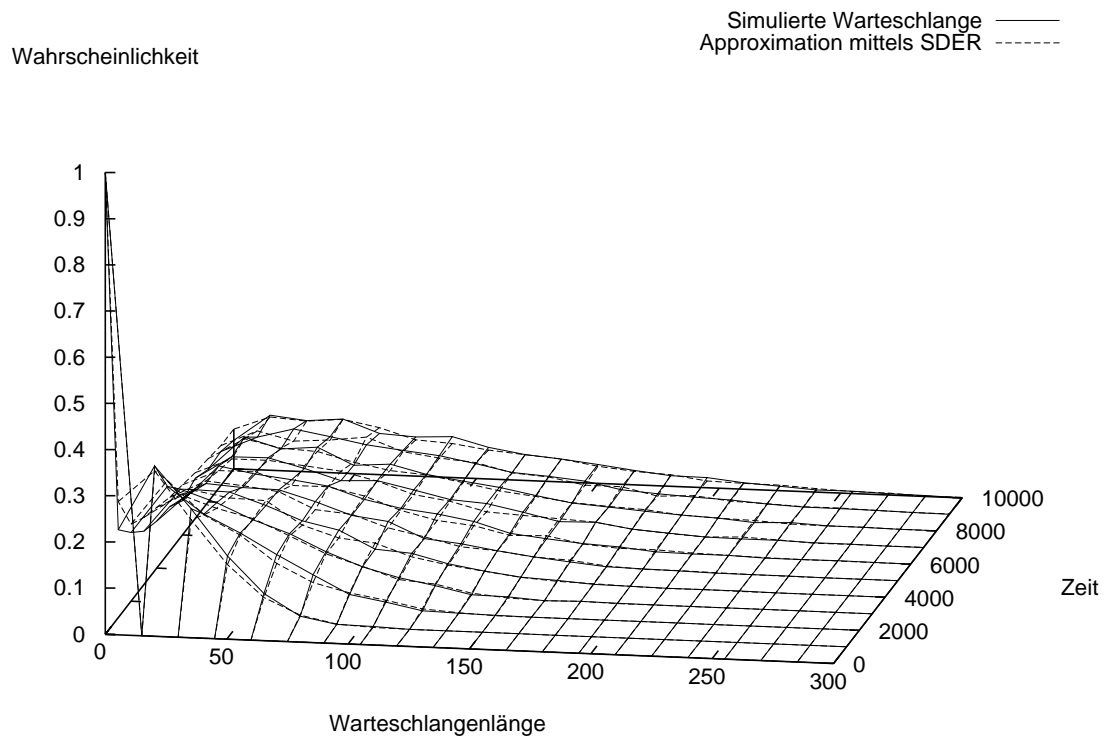


Abbildung 9.29: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

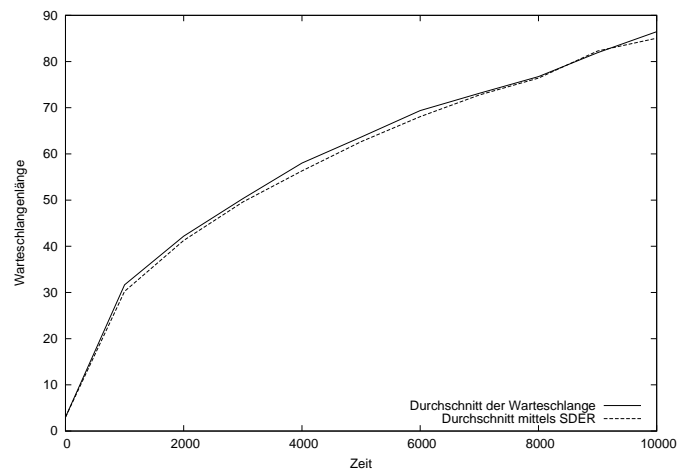


Abbildung 9.30: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

## Approximation der G/G/1(1,b)-Warteschlange bei niedriger Auslastung

Nun betrachten wir zum Vergleich die Approximation bei niedrigerer Auslastung  $\rho = 0,7$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0,0	0	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	1	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	2	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	3	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0,0	4	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	5	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	6	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	7	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	8	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	9	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	10	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	11	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0,0	12	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
500,0	0	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0015	[-0,0002 ; 0,0032]
500,0	1	0,0070	[0,0033 ; 0,0107]	0,0150	[0,0097 ; 0,0203]	-0,0080	[-0,0145 ; -0,0015]
500,0	2	0,0385	[0,0301 ; 0,0469]	0,1995	[0,1820 ; 0,2170]	-0,1610	[-0,1804 ; -0,1416]
500,0	3	0,1085	[0,0949 ; 0,1221]	0,5480	[0,5262 ; 0,5698]	-0,4395	[-0,4652 ; -0,4138]
500,0	4	0,2030	[0,1854 ; 0,2206]	0,2240	[0,2057 ; 0,2423]	-0,0210	[-0,0464 ; 0,0044]
500,0	5	0,2230	[0,2048 ; 0,2412]	0,0135	[0,0084 ; 0,0186]	0,2095	[0,1906 ; 0,2284]
500,0	6	0,1895	[0,1723 ; 0,2067]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,1895	[0,1723 ; 0,2067]
500,0	7	0,1260	[0,1115 ; 0,1405]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,1260	[0,1115 ; 0,1405]
500,0	8	0,0680	[0,0570 ; 0,0790]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0680	[0,0570 ; 0,0790]
500,0	9	0,0225	[0,0160 ; 0,0290]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0225	[0,0160 ; 0,0290]
500,0	10	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0095	[0,0052 ; 0,0138]
500,0	11	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]
500,0	12	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1000,0	0	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]
1000,0	1	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0160	[0,0105 ; 0,0215]	-0,0085	[-0,0152 ; -0,0018]
1000,0	2	0,0320	[0,0243 ; 0,0397]	0,2105	[0,1926 ; 0,2284]	-0,1785	[-0,1980 ; -0,1590]
1000,0	3	0,1120	[0,0982 ; 0,1258]	0,5370	[0,5151 ; 0,5589]	-0,4250	[-0,4509 ; -0,3991]
1000,0	4	0,1845	[0,1675 ; 0,2015]	0,2230	[0,2048 ; 0,2412]	-0,0385	[-0,0634 ; -0,0136]
1000,0	5	0,2115	[0,1936 ; 0,2294]	0,0125	[0,0076 ; 0,0174]	0,1990	[0,1805 ; 0,2175]
1000,0	6	0,2050	[0,1873 ; 0,2227]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,2040	[0,1863 ; 0,2217]
1000,0	7	0,1260	[0,1115 ; 0,1405]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,1260	[0,1115 ; 0,1405]
1000,0	8	0,0795	[0,0676 ; 0,0914]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0795	[0,0676 ; 0,0914]
1000,0	9	0,0315	[0,0238 ; 0,0392]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0315	[0,0238 ; 0,0392]
1000,0	10	0,0085	[0,0045 ; 0,0125]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0085	[0,0045 ; 0,0125]
1000,0	11	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
1000,0	12	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]

Tabelle 9.31: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0,7$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0,0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
500,0	5,231	[5,163 ; 5,299]	3,519	[3,496 ; 3,542]	1,712	[1,640 ; 1,784]
1000,0	5,331	[5,266 ; 5,396]	3,513	[3,488 ; 3,538]	1,818	[1,749 ; 1,887]

Tabelle 9.32: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0,7$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

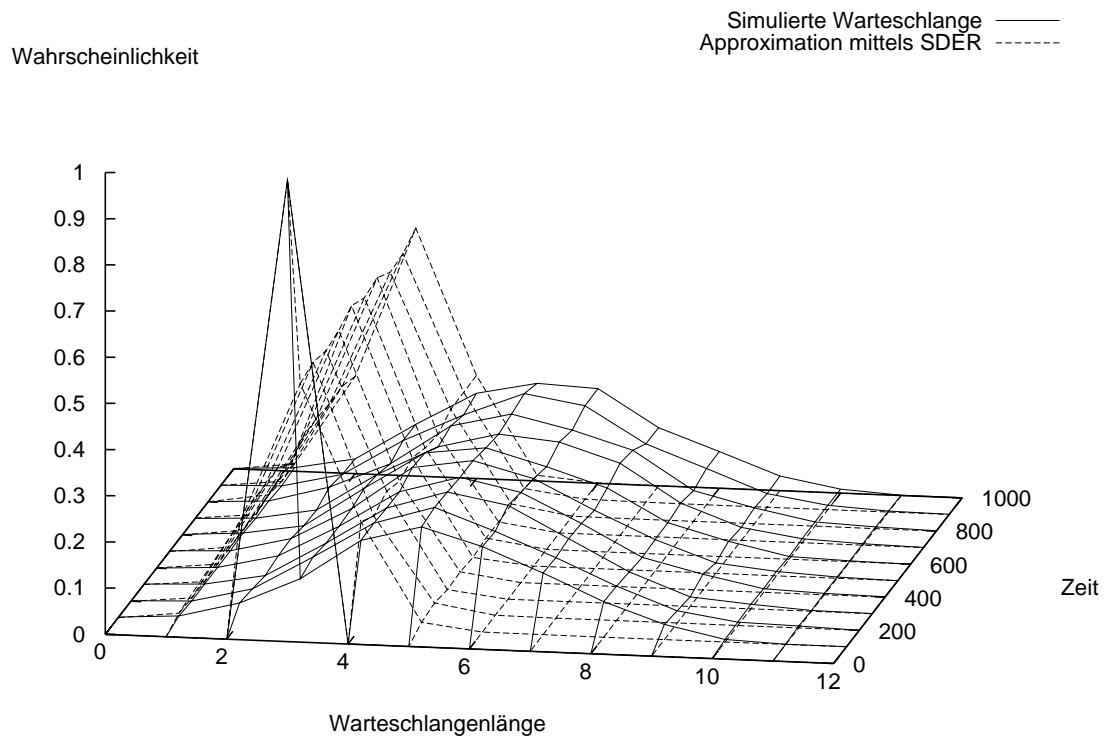


Abbildung 9.31: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.7$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

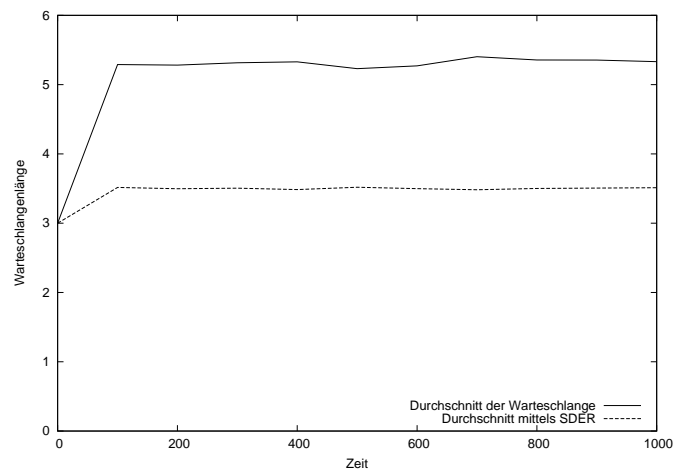


Abbildung 9.32: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.7$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 1$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel



Es zeigt sich, daß diese Diffusionsapproximation für eine Warteschlange ohne Mindestbediengröße mit niedriger Auslastung nicht mehr brauchbar ist. Genauso wie zuvor bei der Approximation der Warteschlange mit fester Bediengröße und Auslastung  $\rho = 0,7$  auf Seite 98 ist die Verteilung des Lösungsprozesses der SDER viel stärker zentriert als die des simulierten Warteschlangenprozesses. Nur liegt in diesem Fall auch der Erwartungswert deutlich zu niedrig, wodurch die Verteilung insgesamt schlecht beschrieben wird.

### Approximation der G/G/1(1,b)-Warteschlange bei hoher Varianz

In Abschnitt 9.3 haben wir gesehen, daß sich eine höhere Varianz positiv auf die Güte der Approximation auswirkt. Andererseits hat sich auch gezeigt, daß die Approximation von Warteschlangen ohne Mindestbediengröße schlechtere Ergebnisse liefert als für solche mit einer festen Bediengröße. Es fragt sich nun, welcher dieser beiden Effekte größer ist, also wie sich die Ergebnisse bei gleichzeitigen Auftreten beider verändern. Daher untersuchen wir eine Warteschlange ohne Mindestbediengröße mit  $SCV(a) = SCV(s) = 5$ .

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
0	0 - 14	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	1,0000	[1,0000 ; 1,0000]	0,0000	[-0,0000 ; 0,0000]
0	15 - 29	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	30 - 44	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	45 - 59	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	60 - 74	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	75 - 89	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	90 - 104	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	105 - 119	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	120 - 134	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	135 - 149	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	150 - 164	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	165 - 179	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	180 - 194	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	195 - 209	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	210 - 224	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	225 - 239	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
0	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1500	0 - 14	0,2570	[0,2378 ; 0,2762]	0,2965	[0,2765 ; 0,3165]	-0,0395	[-0,0672 ; -0,0118]
1500	15 - 29	0,2690	[0,2496 ; 0,2884]	0,2400	[0,2213 ; 0,2587]	0,0290	[0,0020 ; 0,0560]
1500	30 - 44	0,1810	[0,1641 ; 0,1979]	0,1780	[0,1612 ; 0,1948]	0,0030	[-0,0208 ; 0,0268]
1500	45 - 59	0,1120	[0,0982 ; 0,1258]	0,1165	[0,1024 ; 0,1306]	-0,0045	[-0,0242 ; 0,0152]
1500	60 - 74	0,0705	[0,0593 ; 0,0817]	0,0635	[0,0528 ; 0,0742]	0,0070	[-0,0085 ; 0,0225]
1500	75 - 89	0,0450	[0,0359 ; 0,0541]	0,0420	[0,0332 ; 0,0508]	0,0030	[-0,0096 ; 0,0156]
1500	90 - 104	0,0275	[0,0203 ; 0,0347]	0,0250	[0,0182 ; 0,0318]	0,0025	[-0,0074 ; 0,0124]
1500	105 - 119	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	0,0170	[0,0113 ; 0,0227]	-0,0030	[-0,0107 ; 0,0047]
1500	120 - 134	0,0115	[0,0068 ; 0,0162]	0,0100	[0,0056 ; 0,0144]	0,0015	[-0,0049 ; 0,0079]
1500	135 - 149	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0060	[0,0026 ; 0,0094]	-0,0020	[-0,0064 ; 0,0024]
1500	150 - 164	0,0055	[0,0023 ; 0,0087]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0035	[-0,0003 ; 0,0073]
1500	165 - 179	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0000	[-0,0031 ; 0,0031]
1500	180 - 194	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	-0,0010	[-0,0024 ; 0,0004]
1500	195 - 209	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1500	210 - 224	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
1500	225 - 239	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
1500	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]
3000	0 - 14	0,2225	[0,2043 ; 0,2407]	0,2930	[0,2731 ; 0,3129]	-0,0705	[-0,0975 ; -0,0435]
3000	15 - 29	0,2620	[0,2427 ; 0,2813]	0,2280	[0,2096 ; 0,2464]	0,0340	[0,0074 ; 0,0606]

Zeit	Länge	Wahrscheinlichkeit der Simulation	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Wahrscheinlichkeit der SDER	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95	Differenz der Wahrscheinlichkeiten	Konfidenzintervall des Niveaus 0,95
3000	30 - 44	0,1735	[0,1569 ; 0,1901]	0,1590	[0,1430 ; 0,1750]	0,0145	[-0,0086 ; 0,0376]
3000	45 - 59	0,1125	[0,0987 ; 0,1263]	0,1045	[0,0911 ; 0,1179]	0,0080	[-0,0113 ; 0,0273]
3000	60 - 74	0,0825	[0,0704 ; 0,0946]	0,0720	[0,0607 ; 0,0833]	0,0105	[-0,0060 ; 0,0270]
3000	75 - 89	0,0555	[0,0455 ; 0,0655]	0,0485	[0,0391 ; 0,0579]	0,0070	[-0,0068 ; 0,0208]
3000	90 - 104	0,0320	[0,0243 ; 0,0397]	0,0350	[0,0269 ; 0,0431]	-0,0030	[-0,0142 ; 0,0082]
3000	105 - 119	0,0240	[0,0173 ; 0,0307]	0,0245	[0,0177 ; 0,0313]	-0,0005	[-0,0100 ; 0,0090]
3000	120 - 134	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	0,0140	[0,0089 ; 0,0191]	-0,0010	[-0,0082 ; 0,0062]
3000	135 - 149	0,0075	[0,0037 ; 0,0113]	0,0130	[0,0080 ; 0,0180]	-0,0055	[-0,0117 ; 0,0007]
3000	150 - 164	0,0070	[0,0033 ; 0,0107]	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0045	[0,0002 ; 0,0088]
3000	165 - 179	0,0040	[0,0012 ; 0,0068]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0020	[-0,0014 ; 0,0054]
3000	180 - 194	0,0025	[0,0003 ; 0,0047]	0,0020	[0,0000 ; 0,0040]	0,0005	[-0,0024 ; 0,0034]
3000	195 - 209	0,0010	[-0,0004 ; 0,0024]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0005	[-0,0012 ; 0,0022]
3000	210 - 224	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	-0,0005	[-0,0015 ; 0,0005]
3000	225 - 239	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0005	[-0,0005 ; 0,0015]
3000	240 - 254	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]	0,0000	[0,0000 ; 0,0000]

Tabelle 9.33: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

Zeit	Durchschnitt der Simulation	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Durchschnitt der SDER	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95	Differenz der Durchschnitte	Konfidenzintervall zum Niveau 0,95
0	3,000	[3,000 ; 3,000]	3,000	[3,000 ; 3,000]	0,000	[0,000 ; 0,000]
1500	36,196	[35,069 ; 37,322]	35,244	[34,043 ; 36,445]	0,952	[-0,679 ; 2,582]
3000	40,454	[38,955 ; 41,952]	38,627	[37,221 ; 40,034]	1,826	[-0,210 ; 3,862]

Tabelle 9.34: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

Bei diesem Beispiel liefert die Approximation für die G/G/1(1,b)-Warteschlange gute Ergebnisse. Die Verteilung wird, abgesehen von ihrem linken Ende, gut getroffen. Auch der Erwartungswert wird mit einem Fehler von maximal 4,5% gut angenähert.

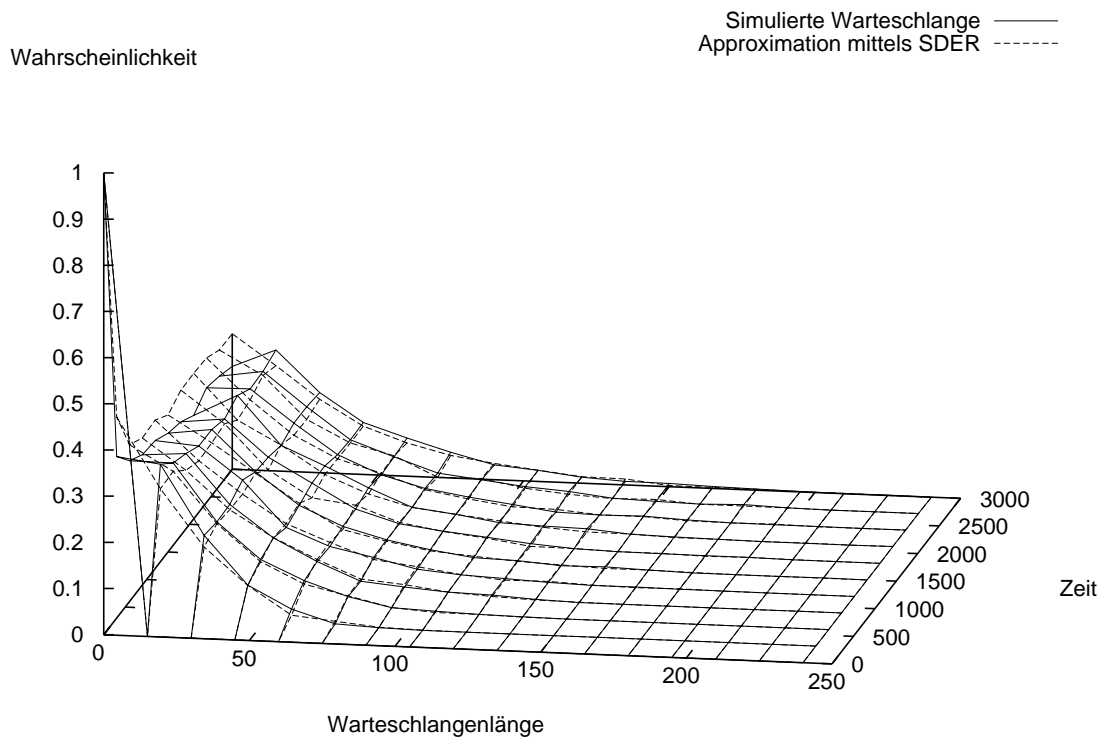


Abbildung 9.33: Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

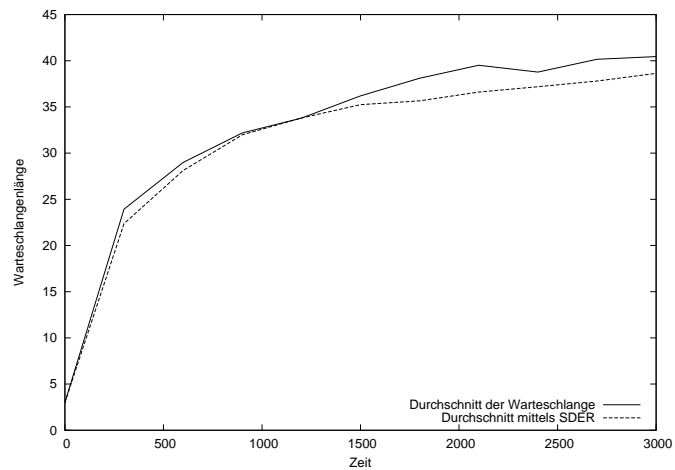


Abbildung 9.34: Approximation der Erwartungswertfunktion mit  $\lambda = 0.95$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $b = 5$ ,  $SCV(a) = SCV(s) = 5$ ,  $Q(0) = 3$  und (1,b)-Bedienregel

## 9.6 Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse

Nachdem wir für verschiedene Warteschlangen die in dieser Arbeit entwickelte Diffusionsapproximation mit der simulierten Warteschlange verglichen haben, lassen sich Schlüsse auf die allgemeine Güte der Approximation ziehen. Es zeigt sich, daß sie für eine feste Bediengruppengröße abgesehen von einigen Spezialfällen sehr gute Resultate liefert. Wenn es keine Mindestbediengröße gibt, ist die Approximation allerdings etwas schlechter.

Da die Approximation auf der Annahme  $\rho \rightarrow 1$  beruht, ist es nicht überraschend, daß die Ergebnisse bei geringerer Auslastungen  $\rho$  deutlich schlechter sind. Im Gegenteil: Es ist bemerkenswert, daß selbst bei niedrigen Auslastungen der Durchschnitt der Warteschlangenlänge mit fester Bediengröße gut geschätzt wird.

Bei hohen Auslastungen einschließlich Überlastfällen werden die Resultate sowohl für eine feste Bediengruppengröße, als auch ohne Mindestbediengröße besser. Besonders fällt dabei der Fall mit einer Auslastung von  $\rho = 1,2$  ins Auge, bei dem man in Tabelle 9.11 sieht, daß die Verteilung im Rahmen der statistischen Genauigkeit praktisch genau getroffen wird. Aber auch bei niedrigerer Auslastung wird die transiente Verteilung bereits gut getroffen (vergleiche Abbildungen 9.7, 9.9 oder 9.29).

Genau wie eine größere Auslastung führt auch eine erhöhte Variabilität zu besseren Ergebnissen: Die transienten Verteilungen und die Durchschnitte werden sich sehr ähnlich. Umgekehrt führt eine Reduktion des Variationskoeffizienten zu schlechteren Vorhersagen. Dies läßt sich damit erklären, daß dabei die Warteschlange zunehmend deterministischer wird. Die Diffusionsapproximation beruht auf einer besonderen Form des zentralen Grenzwertsatzes, dessen Konvergenz mit sinkender Varianz immer langsamer wird.

Eine geringe Bediengröße führt zu besseren Approximationen, während große Bediengruppen die Näherung deutlich verschlechtern wie in Abbildungen 9.25 und 9.26 zu sehen ist.

In Abschnitt 9.5 zeigt sich, daß bei ansonsten gleichen Bedingungen die Approximation eines  $G/G/1(1,b)$ -Systems schlechter gelingt als die eines  $G/G/1(b,b)$ -Systems. Ein Grund hierfür kann die zusätzliche Approximation sein, die für unsere Analyse der  $G/G/1(1,b)$ -Warteschlange in Abschnitt 7.2 notwendig war. Dort hatten wir die Anzahl der Kunden  $KB(t)$ , die in einer gerade stattfindenden Bedienung bedient werden könnten, mit der Warteschlangenlänge  $Q(t)$  abgeschätzt und damit etwas überschätzt. Dadurch wiederum unterschätzt die Diffusionsapproximation die Warteschlangenlänge etwas.

Die Diffusionsapproximation liefert jedoch in fast allen Fällen zumindest eine grobe Schätzung der Warteschlangenlänge über die Zeit. Alle Ergebnisse sind fast genauso gut für transiente Betrachtungen geeignet wie für stationäre. Letzteres ist durchaus überraschend, lag der Approximation doch auch der Grenzübergang  $t \rightarrow \infty$  zu Grunde. Darüber hinaus können auch Überlastfälle untersucht werden, was mit Approximationen für stationäre Verteilungen nicht möglich ist, da es in diesen Fällen keine stationäre Verteilung gibt.

# 10 Zusammenfassung und Ausblick

Es liegen nun also zwei verschiedene Ansätze der Diffusionsapproximation vor: Zum einen der in dieser Arbeit entwickelte, basierend auf einer stochastischen Herleitung und formuliert als stochastische Differentialgleichung, und zum anderen der traditionelle Ansatz, der die Fokker-Planck-Gleichung auf die transiente Wahrscheinlichkeitsdichte anwendet.

Obwohl beide Ansätze sehr unterschiedlich wirken, sind sie doch verwandt. Der Schlüssel zu dieser Feststellung ist Theorem 3.11, welches die Lösung einer reflektierten stochastischen Differentialgleichung mit der Fokker-Planck-Gleichung mit gleichen Koeffizienten und entsprechender Nebenbedingung verknüpft.

Die Approximationsprozesse, die in Kapiteln 5 bis 7 entwickelt wurden, sind Lösungen einer stochastischen Differentialgleichung beziehungsweise einer reflektierten stochastischen Differentialgleichung. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung erfüllt nach Theorem 3.11 die Fokker-Planck-Gleichung mit gleichen Koeffizienten und Nebenbedingungen.

Daher unterscheiden sich die Verteilungen dieser Approximationsprozesse nur durch die unterschiedlichen Drift- und Diffusionskoeffizienten und eventuell in der unterschiedlichen Modellierung der Schranke von den Verteilungen, die durch Lösung der Fokker-Planck-Gleichung bei Zisgen [Zis99] oder Mitzlaff [Mit97] erhalten wurden.

Die beiden Formulierungen der entwickelten Approximationsprozesse, Fokker-Planck-Gleichung mit Reflektion und SDE mit Reflektion sind also gleichwertig. Die in dieser Arbeit dargestellte Diffusionsapproximation unterscheidet sich von dem herkömmlichen Ansatz aber nicht nur darin, daß das Ergebnis als stochastische Differentialgleichung statt als partielle Differentialgleichung der Wahrscheinlichkeitsdichte formuliert ist:

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer Diffusionsapproximation für das  $G/G/1(b,b)$ - und das  $G/G/1(1,b)$ -Warteschlangensystem, die auch eine Analyse der transienten Phase erlaubt. Untergeordnetes Ziel war es, die Diffusionsapproximation stochastischer herzuleiten und so transparenter zu machen. Hierfür wurde eine neue Herleitung entwickelt, um das Randverhalten bei stillstehendem Bediener genauer zu modellieren. Diese hat im Vergleich zu dem älteren auf der Fokker-Planck-Gleichung basierenden Vorgehen mehrere Vorteile:

Durch die Zerlegung des Warteschlangenprozesses  $(Q(t))_{t \in [0, \infty)}$  (siehe (6.4)) ist es möglich, die Reflektion durch die verlorene Bedienkapazität bei Stillstand zu begründen. Der auf dieser Zerlegung beruhenden Reflektion liegt eine pfadweise Betrachtung zu Grunde, die stochastisch transparenter und intuitiver ist. Dieses an Pfaden orientierte Vorgehen

führt dann letztendlich zur Formulierung des Approximationsprozesses als stochastische Differentialgleichung.

Die so hergeleitete stochastische Differentialgleichung läßt sich ebenso wenig exakt lösen wie in früheren Arbeiten die Fokker-Planck-Gleichung. Dies ist aber nicht in dem Unterschied der Formulierung in dem einen oder dem anderen Kalkül begründet, da, wie wir gesehen haben, ohnehin beide weitgehend äquivalent sind, sondern in der Tatsache, daß wir für die Modellierung der Gruppenbedienung nicht-konstante Koeffizienten gewählt haben. Auch eine Fokker-Planck-Gleichung mit solchen nicht-konstanten Koeffizienten ließe sich nicht durch die zuvor verwendeten Methoden exakt lösen. Solange wir (wie in Kapitel 5) bei konstanten Koeffizienten bleiben, ist die Lösung einer SDER eine reflektierte Brownsche Bewegung, deren Verteilung explizit bekannt ist.

Wie in Kapitel 9 gezeigt wurde, sind die Ergebnisse der Approximation mit Ausnahme einiger Spezialfälle sehr gut.

Die Abhängigkeit der Koeffizienten vom Ort ist eine naheliegende Verallgemeinerung, die der Diffusionsapproximation den notwendigen Spielraum gibt, um die Gruppenbedienung zu modellieren. Erst sie ermöglicht eine transiente Approximation für eine  $(b, b)$ -Bedienung mit konstanter Bediengruppengröße und für eine  $(1, b)$ -Bedienung ohne Mindestbediengröße. Erkauft wird sie jedoch dadurch, daß die resultierende SDER numerisch gelöst werden muß. Dies wiederum wirkt sich natürlich negativ auf die Genauigkeit aus und macht viele Replikationen notwendig. Letztlich unterscheidet sich das numerische Lösen der SDER dann nicht mehr wesentlich von dem Simulieren der Warteschlange, was den praktischen Nutzen des Verfahrens im Vergleich zur Simulation zum jetzigen Zeitpunkt einschränkt. Gegenstand weiterer Forschung könnte also eine effektivere Lösung der SDER sein.

Weiterhin scheint es, daß sich mit einer zusätzlichen Anpassung der Koeffizienten auch eine  $(a, b)$ -Bedienregel relativ leicht approximieren ließe, das heißt eine Bedienung mit einer nicht-konstanten Bediengruppengröße, aber einer echten Mindestbediengröße.

Auch eine Verallgemeinerung auf zeitabhängige Raten läßt sich durch entsprechende zeitabhängige Koeffizienten heuristisch relativ einfach erzeugen. Schwieriger scheint die Übertragung der Zeitabhängigkeit auf die Approximation der Ankunfts- und Bedienprozesse durch Brownsche Bewegungen, weil diese dann keine Zählprozesse mehr sind.

Eine größere aber auch sehr lohnende Herausforderung stellt wahrscheinlich folgende Frage dar: Läßt sich die Modellierung der Warteschlange, das heißt die Gleichung (6.4), auf mehrere Dimensionen verallgemeinern, die dann Warteschlangenlängen verschiedener Puffer angeben? Damit könnte man dann auch für die transiente Phase von Warteschlangennetzwerken eine Diffusionsapproximation entwickeln. Allerdings wären in der Praxis numerische Berechnungen für ganze Fertigungslinien damit sicher noch zu aufwendig, denn das liefe auf die numerische Lösung reflektierter stochastischer Differentialgleichung der Dimension  $n$ , wobei  $n$  die Anzahl von Puffern der Produktionslinie ist. Diese Zahl geht in der Praxis schnell in die Hunderte, was zu hohe Rechenzeiten verursachen würde.

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Skorohodsche Reflektion . . . . .	30
9.1	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	95
9.2	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	95
9.3	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.9$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	97
9.4	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.9$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	97
9.5	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	100
9.6	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	100
9.7	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.99$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	103
9.8	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.99$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	103
9.9	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	106
9.10	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	106
9.11	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 1.2$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	109
9.12	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 1.2$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	109
9.13	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 2$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	112
9.14	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 2$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	112
9.15	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	114
9.16	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	115

9.17	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	117
9.18	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	117
9.19	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	119
9.20	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	119
9.21	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 1$ , $b = 1$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	122
9.22	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 1$ , $b = 1$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	122
9.23	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{3}$ , $b = 3$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	125
9.24	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{3}$ , $b = 3$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	125
9.25	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{10}$ , $b = 10$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	128
9.26	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{10}$ , $b = 10$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	128
9.27	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	131
9.28	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	131
9.29	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	134
9.30	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	134
9.31	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	136
9.32	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	136
9.33	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	139
9.34	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	139



# Tabellenverzeichnis

9.1	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	94
9.2	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	94
9.3	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.9$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	96
9.4	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.9$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	98
9.5	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	99
9.6	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	99
9.7	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.99$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	102
9.8	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.99$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	102
9.9	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	105
9.10	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	105
9.11	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 1.2$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	108
9.12	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 1.2$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	108
9.13	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 2$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	111
9.14	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 2$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	111
9.15	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	113
9.16	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	115
9.17	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	116

9.18	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.5$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	116
9.19	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	118
9.20	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 0.1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	120
9.21	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 1$ , $b = 1$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	121
9.22	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 1$ , $b = 1$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	121
9.23	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{3}$ , $b = 3$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	124
9.24	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{3}$ , $b = 3$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	124
9.25	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{10}$ , $b = 10$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	127
9.26	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = \frac{1}{10}$ , $b = 10$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ und $Q(0) = 3$ . . . . .	127
9.27	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	130
9.28	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	130
9.29	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	133
9.30	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 1$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	133
9.31	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	135
9.32	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.7$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 1$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	135
9.33	Approximation der Zustandswahrscheinlichkeiten mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	138
9.34	Approximation der Erwartungswertfunktion mit $\lambda = 0.95$ , $\nu = 0.2$ , $b = 5$ , $SCV(a) = SCV(s) = 5$ , $Q(0) = 3$ und (1,b)-Bedienregel . . . . .	138

# Literaturverzeichnis

- [Aba87a] ABATE, JOSEPH UND WHITT, WARD: *Transient Behavior of Regulated Brownian Motion I: Starting at the Origin*. Advances in Applied Probability, 19:560–598, 1987.
- [Aba87b] ABATE, JOSEPH UND WHITT, WARD: *Transient Behavior of Regulated Brownian Motion II: Non-Zero Initial Conditions*. Advances in Applied Probability, 19:599–631, 1987.
- [All90] ALLEN, ARNOLD O.: *Probability, Statistics, and Queueing Theory*. Academic Press, San Diego, 2. Auflage, 1990.
- [Bha90] BHATTACHARYA, RABI N. UND WAYMIRE, EDWARD C.: *Stochastic Processes with Applications*. Wiley, New York, 1990.
- [Bha03] BHATIA, RAJENDRA (Herausgeber): *Connected at Infinity*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2003.
- [Bil68] BILLENGSLEY, PATRICK: *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 1968.
- [Bor98] BOROVKOV, ALEKSANDR A.: *Ergodicity and Stability of Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1998.
- [Bor02] BORODIN, ANDREI N. UND SALMINEN, PAAVO: *Handbook of Brownian Motion*. Birkhäuser, Basel, 2. Auflage, 2002.
- [Bré99] BRÉMAUD, PIERRE: *Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. Springer, New York, 1999.
- [Che01] CHEN, HONG UND YAO, DAVID D.: *Fundamentals of Queueing Networks*. Springer, New York, 2001.
- [Chi81] CHIAMSIRI, SINGHA UND LEONARD, MICHEAL S.: *A diffusion approximation for bulk queues*. Management Science, 27(10):1188–1199, October 1981.
- [Cox65] COX, D.R. UND MILLER, H.D.: *The Theory of Stochastic Processes*. Methuen, London, 1965.

- [Dud83] DUDA, A.: *Transient Diffusion Approximation for some Queueing Systems*. ACM Sigmetric Conference Minneapolis, Seiten 118–128, 1983.
- [Dud86] DUDA, A.: *Diffusion Approximation for Time-Dependent Queueing Systems*. IEEE J. Select Areas Commun., SAC-4:905–918, 1986.
- [Dur96] DURETT, RICHARD: *Stochastic Calculus*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.
- [Fel54] FELLER, WILLIAM: *Diffusion Processes in One Dimension*. Transactions of the American Mathematical Society, 77:1–31, 1954.
- [Fel66] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol I & II*. Wiley, New York, 1966.
- [Gar85] GARDINER, C.W.: *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 1985.
- [Gav68] GAVER, D.P.: *Diffusion Approximation and Models for certain Congestion Problems*. J. Appl. Prob., 5:607–623, 1968.
- [Gel75] GELENBE, E.: *On approximate Computer System Models*. Journal of the ACM, 22:261–269, 1975.
- [Gic71] GICHMAN, I.I. UND SKOROCHOD, A.W.: *Stochastische Differentialgleichungen*. Akademie Verlag, Berlin, 1971.
- [Gre69] GREEN, C.D.: *Integral Equation Methods*. Nelson, London, 1969.
- [Gri90] GRIPENBERG, G.: *Volterra Integral and Functional Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Gri02] GRIGORIU, MIRCEA: *Stochastic Calculus*. Birkhäuser, Boston, 2002.
- [Gro74] GROSS, DONALD UND HARRIS, CARL M.: *Fundamentals of Queueing Theory*. Wiley, New York, 1974.
- [Gui96] GUILLEMIN, FABRICE M. UND MAZUMDAR, RAVI R.: *Forward Equations for Reflected Diffusions with Jumps*. Applied Mathematics and Optimization, 33:81–102, 1996.
- [Hal78] HALACHMI, B. UND FRANTA, W.R.: *A Diffusion Approximation to the Multiserver Queue*. Managment Sci., 24:522–529, 1978.
- [Har85] HARRISON, J.M.: *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. Wiley, New York, 1985.
- [Igl70a] IGLEHART, D.L. UND WHITT, W.: *Multiple channel queues in heavy traffic, I*. Advances in Applied Probability, 2:150–177, 1970.

- [Igl70b] IGLEHART, D.L. UND WHITT, W.: *Multiple channel queues in heavy traffic, II*. Advances in Applied Probability, 2:355–364, 1970.
- [Ike89] IKEDA, NOBUYUKI UND WATANABE, SHINZO: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland, Amsterdam, 2. Auflage, 1989.
- [Itô65] ITÔ, KIYOSHI UND MCKEAN, HENRY P.: *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer, Berlin, 1965.
- [Itô92] ITÔ, SEIZO: *Diffusion Equations*. American Mathematical Society, Providence, 1992.
- [Kal02] KALLENBERG, OLAV: *Foundations of Modern Probability*. Springer, New York, 2. Auflage, 2002.
- [Kar91] KARATZAS, IOANNIS UND SHREVE, STEVEN E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New York, 2. Auflage, 1991.
- [Kel79] KELLY, FRANK P.: *Reversibility and Stochastic Networks*. Wiley, Chichester, 1979.
- [Kel95] KELLY, FRANK P. UND WILLIAMS, R.J. (Herausgeber): *Stochastic Networks*. Springer, New York, 1995.
- [Küh79] KÜHN, P.J.: *Approximate Analysis of General Queueing Networks by Decomposition*. IEEE Transactions on Communications, 27:113–126, 1979.
- [Kin66] KINGMAN, JOHN F.C.: *On the Algebra of Queues*. Journal of Applied Probability, 3:285–326, 1966.
- [Kle76] KLEINROCK, LEONARD: *Queueing Systems Volumes I & II*. Wiley, New York, 1976.
- [Klo99] KLOEDEN, PETER E. UND PLATEN, ECKHARD: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, 3 Auflage, 1999.
- [Kob74a] KOBAYASHI, HISASHI: *Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks I: Equilibrium Queue Distributions*. Journal of the ACM, 21(2):318–328, 1974.
- [Kob74b] KOBAYASHI, HISASHI: *Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks II: Nonequilibrium Distributions and Applications to Computer Modeling*. Journal of the ACM, 21(3):459–469, 1974.
- [Kry95] KRYLOV, NIKOLAJ V.: *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*. American Mathematical Society, Providence, 1995.
- [Kus92] KUSHNER, HAROLD J. UND DUPUIS, PAUL G.: *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Springer, New York, 1992.

- [Law00] LAW, AVERILL M. UND KELTON, W. DAVID: *Simulation Modelling and Analysis*. McGraw-Hill, Singapore, 3. Auflage, 2000.
- [Lin52] LINDLEY, DENNIS V.: *The Theory of Queues with a single Server*. Proc. Camb. Phil. Soc., 48:277–289, 1952.
- [Ma99] MA, JIN UND YONG, JIONGMIN: *Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications*. Springer, Heidelberg, 1999.
- [Mil71] MILLER, RICHARD K.: *Nonlinear Volterra Integral Equations*. Benjamin, Menlo Park, California, 1971.
- [Mit97] MITZLAFF, ULRICH: *Diffusionsapproximation von Warteschlangensystemen*. Dissertation an der Technischen Universität Clausthal, 1997.
- [Øks03] ØKSENDAL, BERNT: *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg, 6. Auflage, 2003.
- [Ram03] RAMASUBRAMANIAN, S.: *Diffusions and the Martingale Problem of Stroock and Varadhan*. in [Bha03], 2003.
- [Rev99] REVUZ, DANIEL UND YOR, MARC: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 1999.
- [Rob03] ROBERT, PHILIPPE: *Stochastic Networks and Queues*. Springer, Berlin, 2003.
- [Rog87] ROGERS, L.C.G. UND WILLIAMS, D.: *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Band 2 Itô Calculus. Wiley, Chichester, 1987.
- [Rog94] ROGERS, L.C.G. UND WILLIAMS, D.: *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Band 1 Foundations. Wiley, Chichester, 2. Auflage, 1994.
- [Ste70] STEHFEST, H.: *Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms*. Commun. of the ACM, 13(1):47–48, 1970.
- [Ste01] STEELE, MICHAEL J.: *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, New York, 2001.
- [Str79] STROOCK, D.W. UND VARADHAN, S.R.S.: *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer, New York, 1979.
- [Wax54] WAX, NELSON: *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*. Dover Publications, New York, 1954.
- [Wel38] WELCH, B.L.: *The Significance of the Difference Between Two Means When the Population Variances are Unequal*. Biometrika, 25:350–362, 1938.
- [Whi02] WHITT, WARD: *Stochastic-Process Limits*. Springer, New York, 2002.
- [Wie23] WIENER, NORBERT: *Differential space*. J. Math. Phys., 2:131–174, 1923.

- [Wil79] WILLIAMS, DAVID: *Diffusions, Markov Processes, & Martingales*, Band 1 Foundations. Wiley, Chichester, 1979.
- [Wil95] WILLIAMS, R.J.: *Semimartingale Reflecting Brownian Motion in the Orthant*. in [Kel95], Seiten 125–137, 1995.
- [Zis99] ZISGEN, H.: *Warteschlangennetzwerke mit Gruppenbedienung*. Dissertation an der Technischen Universität Clausthal, 1999.